

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПАРАБОЛОЮ Й ЕЛІПСОМ НА ПОВЕРХНІ КУЛІ

Несвідомін Андрій Вікторович

кандидат технічних наук, доцент

Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, Україна

ORCID: 0000-0002-9227-4652

a.nesvidomin@gmail.com

Воліна Тетяна Миколаївна

кандидат технічних наук, доцент

Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, Україна

Сумський національний аграрний університет, м. Суми, Україна

ORCID: 0000-0001-8610-2208

t.n.zaharova@ukr.net

Пилипака Сергій Федорович

доктор технічних наук, професор

Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, Україна

ORCID: 0000-0002-1496-4615

psf55@ukr.net

Бабка Віталій Миколайович

кандидат технічних наук, доцент

Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, Україна

ORCID: 0000-0003-4971-4285

babkavitaliy@ukr.net

Грищенко Ірина Юріївна

кандидат технічних наук, доцент

Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, Україна

ORCID: 0000-0002-1000-9805

irgr@yahoo.com

У кулі та площині є спільні ознаки. У обох гаусова кривина є сталою: у площині вона рівна нулю, а у кулі вона залежить від величини радіуса. Внаслідок цього сферичні криві можуть ковзати по поверхні кулі подібно до того, як плоскі криві можуть ковзати у площині. Деякі властивості плоских кривих характерні і для їх сферичних аналогів. Якщо профіль зубця циліндричної передачі окреслений по евольвенті кола, то зубець конічної передачі теж окреслений по кривій, яка є сферичним аналогом евольвенти кола. Крім того, два еліпси можуть перекочуватися один по одному без ковзання, якщо їх осі обертання розташувати у фокусах. Те ж саме стосується і сферичних еліпсів, тільки на відміну від плоских еліпсів, у яких осі обертання паралельні, у сферичних еліпсів вони перетинаються у центрі сфери. Таку подібність між плоскими кривими та їх сферичними аналогами використовують для проектування сферичних механізмів.

У статті розглянуто побудову кривої – сферичного аналога параболі. За основу взято визначення параболі, як геометричного місця точок, рівновіддаленого від фіксованої точки – фокуса параболі і від прямої – директриси. За директрису на сфері взято екватор, як аналог прямої лінії на площині. Для зручності аналітичних викладок взято кулю одиничного радіуса. В такому випадку довжини дуг вимірюються кутами. За виведеними рівняннями було побудовано сферичні параболі, які на відміну від плоских є замкнені. Для параболі на площині всі промені, які йдуть із фокуса, відбиваються від параболі і утворюють пучок паралельних прямих. Аналогічно відбувається і на сферичній параболі з тією відмінністю, що аналогом паралельних прямих є множина меридіанів, які перетинаються в полюсі. За цією властивістю сферична парабола подібна до сферичного еліпса, у якого промені, що виходять із одного полюса, після відбиття попадають у другий полюс. Велика вісь еліпса у кутовому вимірі може набувати значень до 180° . Математично доведено, що у випадку, коли велика вісь еліпса дорівнює 90° , то сферичний еліпс одночасно є сферичною параболою. Таким чином сферична парабола є частковим випадком сферичного еліпса. Складено внутрішнє рівняння сферичної параболі у криволінійних координатах та її параметричні рівняння. За отриманими рівняннями побудовано параболі із різним значенням фокального параметра. Знайдена умова, за якої сферична парабола перетворюється у коло.

Ключові слова: сфера, криволінійні координати, внутрішнє рівняння, сферична парабола, сферичний еліпс.

DOI <https://doi.org/10.32782/msnau.2023.4.6>

Вступ. Поверхня кулі має широке застосування у різних сферах людської діяльності. Наприклад, в архітектурі для створення унікальних форм та структур. Сфера може бути використана для створення куполів, арок, а також цілих будівель з оригінальними формами. У фізиці вона використовується для моделювання різних фізичних явищ, таких як розподіл електричного заряду або гравітаційного поля. В математиці поверхня кулі є основою сферичної геометрії та тригонометрії (Данилевський та ін., 2011). Серед сферичних механізмів відомі сферичні шарніри, які надають обертового руху в різних напрямках, сферичні редуктори, які передають обертовий рух з одного валу на другий під різними кутами, сферичні підшипники, сферичні чотириланкові механізми, зокрема, карданний механізм. Все це вимагає математичного опису кривих на поверхні сфери і вивчення їх властивостей за аналогією із плоскими кривими. Конструюванню кривих на сфері у функції натурального параметра присвячені праці (Пилипака та ін., 2008; 2014). Моделювання смуг розгортних поверхонь, дотичних до поверхні кулі розглянуто в праці (Пилипака та ін., 2018). В праці (Kresan et al., 2023) на поверхні сфери побудовано некруглі колеса, які є основою для утворення аксоїдів, що можуть обкочуватися один навколо одного, обертаючись навколо осе, які перетинаються в центрі сфери. Аксоїди, в основі яких є сферичні еліпси, наведені в праці (Kresan et al., 2022). Конструювання сферичних аналогів циклоїди і евольвенти кола розглянуто в праці (Nesvidomin et al., 2023). Формоутворення сферичних епіциклоїд при обкочуванні рухомого конуса по нерухомому здійснено в праці (Пилипака та ін., 2023). Рух частинки по сферичному сегменту з вертикальними радіально встановленими лопатками розглянуто в праці (Воліна та ін., 2021). В працях (Wang et al., 2020; Guven et al., 2014; Yayli et al., 2011) розглядаються інші питання, пов'язані із поверхнею кулі.

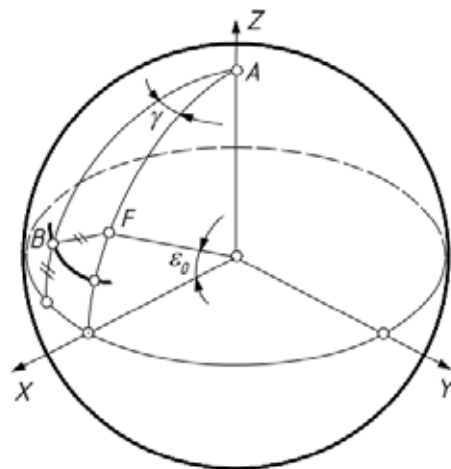
Матеріали і методи досліджень. Криві другого порядку – парабола, еліпс і гіпербола – є конічними перерізами, оскільки конкретна крива може бути отримана при перерізі одного і того ж конуса в залежності від положення січної площини. Відповідно в математиці існує формулювання, яке вказує на спільне походження цих кривих. Якщо знайдено геометричне місце точок, у яких відношення відстані до однієї фіксованої точки площини, яка називається фокусом, до відстані до фіксованої прямої, яка називається директрисою, є величина стала, це геометричне місце точок є конічним перерізом. Вид цієї кривої залежить від величини відношення, яке називають ексцентриситетом. Якщо ексцентриситет рівний одиниці, то кривою є парабола, менше одиниці – еліпс, більший одиниці – гіпербола.

Директрисою на площині є пряма. Її внутрішньою властивістю є найкоротша відстань між двома заданими точками, через які проходить ця пряма. За аналогією на сфері така властивість притаманна колам великого радіуса. За таке коло візьмемо екватор кулі. Запишемо параметричні рівняння кулі одиничного радіуса:

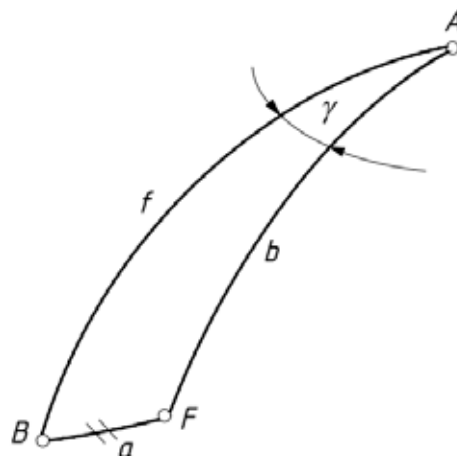
$$X = \cos \varepsilon \cos \gamma; \quad Y = \cos \varepsilon \sin \gamma; \quad Z = \sin \varepsilon, \quad (1)$$

де ε і γ – широта і довгота – криволінійні координати сфери, які вимірюються кутами.

При $\varepsilon=0$ згідно рівнянь (1) отримаємо рівняння екватора. Відлік кута ε відбувається від екватора до полюса A (рис. 1а). На нульовому меридіані (при $\gamma=0$) візьмемо точку F , яку приймемо за фокус сферичної параболи. Відстань від фокуса F до екватора вимірюється кутом ε_0 , який є фокальним параметром. На рис. 1а потовщеною лінією зображено фрагмент сферичної параболи, яка проходить через точку B , а вершина розташована на нульовому меридіані посередині фокального параметра. Відстань від директриси (екватора) до точки B параболи вимірюється кутом ε вздовж меридіана, який відповідає куту γ при вершині A сферичного трикутника ABF . Ця відстань позначена двома рисками. З іншої сторони, таку ж саму відстань має відрізок BF – відстань від фокуса F до точки B параболи. Знайдемо цю відстань. Для цього розглянемо сферичний трикутник ABF (рис. 1б).



а)



б)

Рис. 1. Графічні ілюстрації до побудови сферичної параболи:

- а) фрагмент сферичної параболи на поверхні кулі з позначенням рівних відстаней від її точки B до фокуса F і директриси (екватора); б) сферичний трикутник ABF , у якого сторону BF потрібно знайти

У нього відомо три кути: сторони f і b , які вимірюються кутами $f=90^\circ-\varepsilon$, $b=90^\circ-\varepsilon_0$ і кут γ між цими сторонами. Нам потрібно знайти відстань від точки B до фокуса F , тобто сторону a у кутовому вимірі. З теореми синусів для косокутних сферичних трикутників можна записати:

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin A}. \quad (2)$$

Щоб знайти кут a за формулою (2), потрібно знати кут при вершині B . Його ми знайдемо за іншою формулою:

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\sin f \operatorname{ctg} b - \cos f \cos A}{\sin A}. \quad (3)$$

Після підстановки у формулу (3) кутів $f=90^\circ-\varepsilon$, $b=90^\circ-\varepsilon_0$ і $B=\gamma$, отримуємо:

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\cos \varepsilon \operatorname{tg} \varepsilon_0 - \sin \varepsilon \cos \gamma}{\sin \gamma}. \quad (4)$$

Перейдемо в (4) від котангенса до синуса і підставимо отриманий вираз у (2). Розв'язавши (2) відносно кута a , отримуємо:

$$\sin a = \cos \varepsilon_0 \sqrt{\sin^2 \gamma + (\cos \gamma \sin \varepsilon - \cos \varepsilon \operatorname{tg} \varepsilon_0)^2}. \quad (5)$$

$$\cos a = \cos \varepsilon_0 \cos \varepsilon \cos \gamma + \sin \varepsilon_0 \sin \varepsilon. \quad (6)$$

Але кут a дорівнює поточному значенню кута ε (на рис. 1а дуги, що відповідають цим кутам, позначені двома рисками). Підставимо в (5) або (6) замість кута a кут ε і розв'яжемо отримане рівняння відносно ε :

$$\varepsilon = \operatorname{Arccos} \frac{\sin \varepsilon_0}{\sqrt{\sin^2 \varepsilon_0 + (1 - \cos \varepsilon_0 \cos \gamma)^2}}. \quad (7)$$

Рівняння (7) є внутрішнім рівнянням сферичної параболі. Воно встановлює взаємозв'язок між криволінійними координатами ε і γ . Підставивши (7) у рівняння сфери (1) замість ε , ми отримуємо параметричні рівняння сферичної параболі.

Зазначимо, що рівняння (6) можна знайти простішим шляхом. Дугу BF , що відповідає кутові a (рис. 1), можна

шукати, як кут між радіус-векторами, які йдуть із центра сфери до точок B і F . Координати вектора, що йде до фокуса F :

$$\{\cos \varepsilon_0, 0, \sin \varepsilon_0\}. \quad (8)$$

Координати вектора, що йде до поточної точки B сферичної параболі:

$$\{\cos \varepsilon \cos \gamma, \cos \varepsilon \sin \gamma, \sin \varepsilon\}. \quad (9)$$

Кут a між векторами (8) і (9) знаходимо за відомою формулою і отримуємо результат, аналогічний (6).

Результати досліджень. На рис. 2а побудовано сферичні параболі для різних значень фокального параметра ε_0 . Всі вони замкнені і розташовані в одній півкулі. Коли фокальний параметр $\varepsilon_0 = 90^\circ$, парабола перетворюється в коло. В цьому випадку фокус знаходиться у полюсі. Відстань від нього до будь-якої точки кола, як і від кола до екватора, вимірюється вздовж меридіана, є сталою і рівною 45° . Промені, які виходять із фокуса, після відбивання від кола повертаються назад у фокус. Для інших парабол, які не є колом, промені відбиваються від параболі і рухаються вздовж меридіанів, які є аналогом паралельних прямих на площині, і перетинаються у полюсі сфери. Якщо параболу разом із фокусом і точкою перетину відбитих променів повернути навколо осі Y на кут $\varepsilon_0/2$, то ми отримуємо зображення, представлене на рис. 2б. Будь-який промінь, що виходить із точки F , після відбиття від параболі попадає у протилежну точку, яка розташована на такій же відстані від другої вершини параболі, як точка F від першої.

Така властивість характерна для еліпса, та і сама парабола подібна до еліпса із двома фокусами. Ще однією особливістю отриманої кривої є те, що відстань між протилежними вершинами є сталою і рівною 90° незалежно від фокального параметра.

В праці (Kresan et al., 2022) наведено рівняння сферичного еліпса, форма якого залежить від двох сталих величин: великої осі ψ і відстані між фокусами θ (рис. 3б). Сам еліпс будується, виходячи із того, що сума

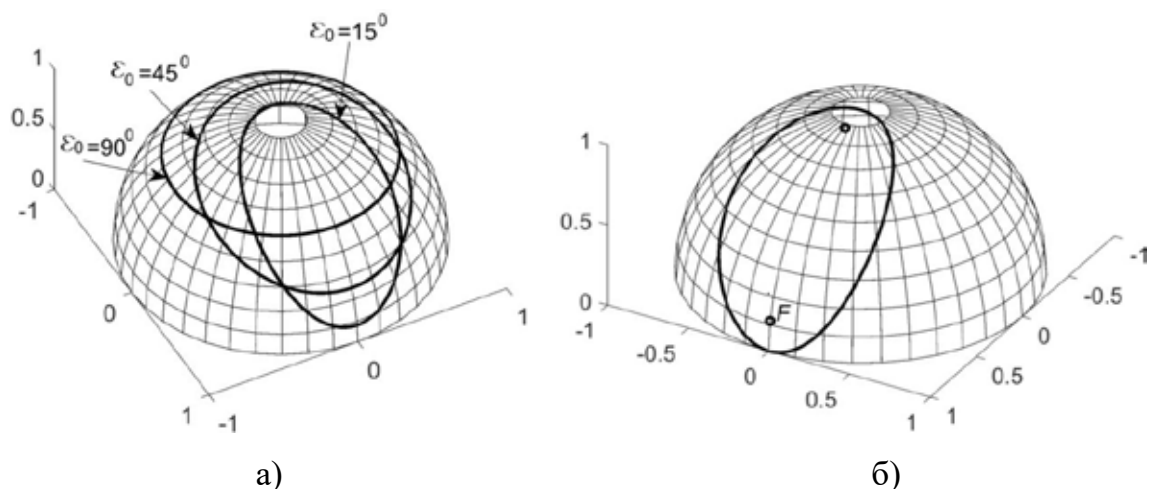


Рис. 2. Сферичні параболі на поверхні кулі:

а) сферичні параболі при різних значеннях фокального параметра; б) сферична парабола після повороту її навколо осі Y на кут $\varepsilon_0/2$

відстаней у кутовому вимірі від фокусів F і F_1 до будь-якої точки A еліпса є величина стала (рис. 3а). Внутрішнє рівняння еліпса у криволінійних координатах має вигляд (Kresan et al., 2022):

$$\varepsilon = \arctg\left(\frac{\cos\theta - \cos\psi}{\sin\psi - \cos\gamma \sin\theta}\right). \quad (10)$$

Розглянемо частковий випадок, коли $\psi=90^\circ$. На основі порівнянь рисунків 3б, 1а та 2б можна записати:

$$\psi = \theta + 2\frac{\varepsilon_0}{2} = \theta + \varepsilon_0. \quad (11)$$

Приймаючи до уваги, що $\psi=90^\circ$, запишемо:

$$\theta = 90^\circ - \varepsilon_0. \quad (12)$$

Після цього внутрішнє рівняння еліпса (10) набуває вигляду:

$$\varepsilon = \arctg\left(\frac{\sin\varepsilon_0}{1 - \cos\gamma \cos\varepsilon_0}\right). \quad (13)$$

Внутрішнє рівняння (13) складено для сфери, у якій відлік кута ε починається не від екватора, а від полюса. Для цього випадку параметричні рівняння сфери мають вигляд:

$$X = \sin\varepsilon \cos\gamma; \quad Y = \sin\varepsilon \sin\gamma; \quad Z = \cos\varepsilon, \quad (14)$$

При підстановці (13) у (14) ми отримуємо параметричні рівняння еліпса із великою віссю $\psi=90^\circ$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin\varepsilon_0 \cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\varepsilon_0 + (1 - \cos\varepsilon_0 \cos\gamma)^2}}; \\ y &= \frac{\sin\varepsilon_0 \sin\gamma}{\sqrt{\sin^2\varepsilon_0 + (1 - \cos\varepsilon_0 \cos\gamma)^2}}; \\ z &= \frac{1 - \cos\varepsilon_0 \cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\varepsilon_0 + (1 - \cos\varepsilon_0 \cos\gamma)^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Якщо ми підставимо внутрішнє рівняння (7) у параметричні рівняння сфери (1), то ми отримаємо точно такі ж рівняння, які отримані у (15). Це свідчить про те, що параметричні рівняння сферичної параболі є частковим випадком рівнянь сферичного еліпса, коли його велика вісь дорівнює 90° .

Обговорення. За внутрішнім рівнянням (9) при підстановці його у (14) можна побудувати набагато більше варіантів еліпсів, оскільки їх формою можна управляти двома сталими величинами θ і ψ .

На рис. 4а побудовані еліпси, у яких велика вісь більша за 90° . При $\theta = \psi$ еліпс вироджується у дугу меридіана між фокусами. Еліпс перетворюється в коло великого діаметра при $\psi = 180^\circ$ незалежно від значення кута. Це показано на вигляді збоку (рис. 4б) при $\theta = 90^\circ$.

З наведених прикладів і математичних викладок можна зробити висновок, що сферична параболі

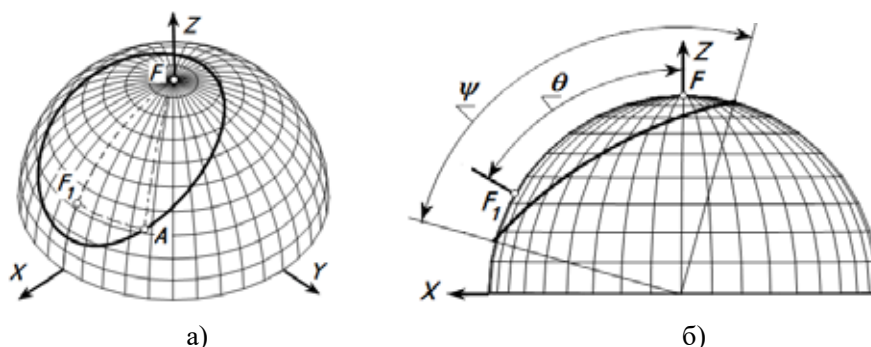


Рис. 3. Сферичні еліпси на поверхні кулі:

а) утворення сферичного еліпса за умови, що сума дуг із фокусів F і F_1 до будь-якої точки A еліпса є величина стала; б) вихідні дані для утворення сферичного еліпса: відстань між фокусами θ і велика вісь ψ

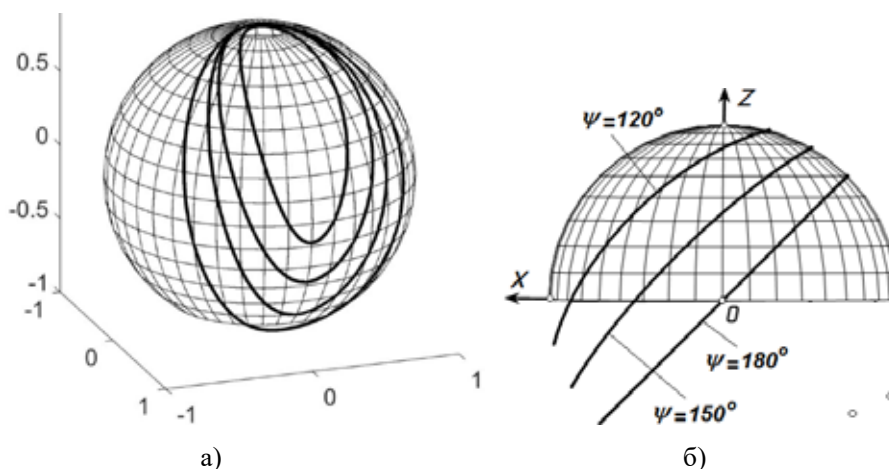


Рис. 4. Варіанти еліпсів при $\psi > 90^\circ$:

а) різні комбінації сталих θ і ψ ; б) відстань між фокусами $\theta = 90^\circ$ і різна величина великої осі ψ

є частковим випадком сферичного еліпса, коли у нього велика вісь $\psi = 90^\circ$. При цьому відстань між фокусами згідно (12) рівна $90^\circ - \varepsilon_0$.

Дослідження показали, що для кривих на сфері – сферичних аналогів кривих другого порядку на площині – не можна застосовувати поняття ексцентриситету. Внутрішнє рівняння (7) сферичної параболі було отримано за умови, що довжини дуг від поточної точки параболі до її фокуса і до директриси рівні між собою, тобто їх відношення дорівнює одиниці. При прирівнюванні цих дуг можна ввести коефіцієнт, який забезпечить інше відношення, наприклад, менше одиниці, що відповідає еліпсу на площині. Однак на кулі при такому підході отримати сферичний еліпс не вдається. Однак про спільність походження сферичних параболі і еліпса свідчить отриманий у статті матеріал.

Висновки. Плоскі криві другого порядку об'єднують у одну групу геометрична фігура – конус. Ці криві можуть бути отримані в результаті перетину конуса площиною, через що і носять назву конічних перерізів або конік. Сферичні аналоги цих кривих об'єднують інша геометрична фігура – сфера. В основі побудов вказаних кривих як на площині, так і на сфері, лежать спільні геометричні властивості цих кривих. Це підтверджується результатом, отриманим у статті. Доведено, що сферична параболою є частковим випадком сферичного еліпса, якого фіксована величина великої осі і в кутовому вимірі дорівнює прямому куту. Таким чином, сферичний еліпс із великою віссю, рівною прямому куту на поверхні сфери одиничного радіуса, одночасно є сферичною параболою.

Бібліографічні посилання:

1. Guven, I. A., Nurkan, S. K., & Karacan, M. K. (2014). Ruled Weingarten Surfaces Related to Dual Spherical Curves. *Gen. Math. Notes*, 24, 2, 10–17.
2. Kresan, T., Ahmed, A., Pylypaka, S., Volina, T., Semirnenko, S., Trokhaniak, V., & Zakharova, I. (2023). Construction of spherical non-circular wheels formed by symmetrical arcs of loxodrome. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2023, 1 (1–121), 44–50.
3. Kresan, T., Pylypaka, S., Ruzhylo, Z., Rogovskii, I., & Trokhaniak, O. (2022). Construction of conical axoids on the basis of congruent spherical ellipses. *Archives of Materials Science and Engineering* [this link is disabled](#), 2022, 113 (1), 13–18.
4. Nesvidomin, A., Pylypaka, S., Volina, T., Kalenyk, M., Shuliak, I., Semirnenko, Y., Tarelnyk, N., Hryshchenko, I., & Kholodniak, Y. (2023). Constructing geometrical models of spherical analogs of the involute of a circle and cycloid. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4 (7 (124)), 6–12.
5. Wang, Yo., Chang, Yu. (2020). Mannheim curves and spherical curves. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 17 (07), 2050101.
6. Yayli, Yu., Saracoglu, S. (2011). Some Notes on Dual Spherical Curves. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, 3 (2), 177–189.
7. Volina, T. M., Pylypaka, S. F., & Nesvidomin, A. V. (2021). Rukh chastynky po sferychnomu sehmentu z vertykalnymy radialno vstanovlenymy lopatkamy [Movement of a particle along a spherical segment with vertical radially installed blades]. *Mechanics and mathematical methods*, III, 1, 27–36 (in Ukrainian).
8. Danylevskiy, M. P., Kolosov, A. I., & Yakunin, A. V. (2011). Osnovy sferychnoi heometrii ta tryhonometrii: navch. posib. [Basics of spherical geometry and trigonometry: a textbook]. Khark. nats. akad. misk. hosp-va, Kh.: KhNAMH, 92 p. (in Ukrainian).
9. Pylypaka, S. F., Hryshchenko, I. Yu., & Kresan, T. A. (2018). Modeliuvannya smuh rozghortnykh poverkhon, dotychnykh do poverkhni kuli [Modeling of striping surfaces tangent to the surface of the sphere]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannya*, Kherson: OLDI-PLIUS, 1, 81–88 (in Ukrainian).
10. Pylypaka, S. F., Zakharova, T. M. (2014). Konstruiuvannya sferychnykh kryvykh u funktsii naturalnoho parametra [Construction of spherical curves as a function of a natural parameter]. *Naukovyi visnyk Melitopolskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni Bohdana Khmelnytskoho. Seriya: Matematyka. Heometriia. Informatyka*. Melitopol: Vydavnytstvo MDPU im. B. Khmelnytskoho, 1, 137–145 (in Ukrainian).
11. Pylypaka, S. F., Nesvidomin, A. V. (2023). Formoutvorennia sferychnykh epitsykloid pry obkochuvanni rukhomoho konusa po nerukhomomu [Formation of spherical epicycloids when rolling a moving cone on a stationary one]. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*, 2 (85), 65–70 (in Ukrainian).
12. Pylypaka, S. F. (2008). Analitichne konstruiuvannya prostorovykh ta sferychnykh kryvykh u funktsii vlasnoi duhy [Analytical construction of spatial and spherical curves as a function of their own arc]. *Heometrychne ta kompiuterne modeliuvannya*, 21. Kharkiv: KhDUKhT, 100–105 (in Ukrainian).

Nesvidomin A. V., PhD, Associate Professor, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Volina T. M., PhD, Associate Professor, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, Sumy National Agrarian University, Sumy, Ukraine

Pylypaka S. F., Doctor of Technical Science, Professor, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Babka V. M., PhD, Associate Professor, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Hryshchenko I. Yu., PhD, Associate Professor, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

The connection between the parabola and the ellipse on the surface of the sphere

The sphere and the plane have common features. In both, the Gaussian curvature is constant: in a plane it is equal to zero, and in a sphere it depends on the radius. As a result, spherical curves can slide on the surface of a sphere in the same way that flat curves can slide in a plane. Some properties of flat curves are also characteristic of their spherical counterparts. If the profile of a tooth of a cylindrical gear is outlined along the involute of a circle, then the tooth of a conical gear is also outlined along a curve, which is a spherical analogue of the involute of a circle. In addition, two ellipses can roll over each other without slipping if their axes of rotation are located at the foci. The same applies to spherical ellipses, only unlike flat ellipses, in which the axes of rotation are parallel, in spherical ellipses they intersect at the center of the sphere. This similarity between flat curves and their spherical counterparts is used to design spherical mechanisms.

The article considers the construction of a curve – a spherical analog of a parabola. The basis is the definition of a parabola as a geometric location of points equidistant from a fixed point – the focus of the parabola and from a straight line – the directrix. The equator is taken as the directrix on the sphere, as an analogue of a straight line on a plane. For the convenience of analytical calculations, a sphere of unit radius is taken. In this case, the lengths of the arcs are measured by angles. According to the derived equations, spherical parabolas were constructed, which, unlike flat ones, are closed. For a parabola on a plane, all rays coming from the focus are reflected from the parabola and form a bundle of parallel lines. The same thing happens on a spherical parabola, with the difference that the analog of parallel lines is a set of meridians that intersect at the pole. According to this property, a spherical parabola is similar to a spherical ellipse, in which rays emanating from one pole, after reflection, enter the other pole. The major axis of the ellipse in the angular dimension can take values up to 180° . It is mathematically proven that in the case when the major axis of the ellipse is equal to 90° , then the spherical ellipse is simultaneously a spherical parabola. Thus, a spherical parabola is a partial case of a spherical ellipse. The internal equation of a spherical parabola in curvilinear coordinates and its parametric equations have been compiled. Based on the obtained equations, parabolas with different values of the focal parameter were constructed. The condition under which a spherical parabola turns into a circle has been found.

Key words: sphere, curvilinear coordinates, internal equation, spherical parabola, spherical ellipse.