

ЗАГАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ЗНАХОДЖЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОЧОК ВЕДЕНОЇ ЛАНКИ ПЛОСКИХ МЕХАНІЗМІВ І З ЗАСТОСУВАННЯМ ТРИГРАННИКА Й ФОРМУЛ ФРЕНЕ

Пилипака Сергій Федорович

доктор технічних наук, професор,
Національний університет біоресурсів і природокористування України
ORCID: 0000-0002-1496-4615
email s.pylypaka@nubip.edu.ua

Чепіжний Андрій В.

кандидат технічних наук
Сумський національний аграрний університет
ORCID: 0000-0002-7540-8313
email snausymu@gmail.com

Кривошип шарнірно з'єднаний з ланкою механізму для більшості плоских механізмів є веденою ланкою. Точка з'єднання кривошипа і веденої ланки описує коло при обертанні. У статті нами запропоновано помістити вершину тригранника в точку з'єднання ланок. При цьому направимо до центру кола орт головної нормалі, а орт дотичної розташуємо по дотичній до кола (сполучимо з вектором швидкості кривошипа). Виходячи з такого розташування, при обертанні кривошипа тригранник також обертатиметься, причому головна нормаль буде збігатися з кривошипом. Траєкторії та швидкість руху кривошипа по колу залежатиме від кутової швидкості обертання кривошипа.

Основна ідея статті полягає в знаходженні кінематичних характеристик руху точки з'єднання кривошипа та веденої ланки, коли вона здійснює відносний рух у системі координат, а рухома система рухається відносно нерухомої за певним законом. Таким чином поворот веденої ланки навколо вершини тригранника та рух разом з ним визначає рух веденої ланки по відношенню до нерухомої системи координат.

Положення веденої ланки знаходиться в проєкціях на орти тригранника та перераховується на осі нерухомої системи. Таким же способом знаходимо абсолютну траєкторію руху точки ланки, що у свою чергу дозволяє визначити швидкість і прискорення цієї ж точки. Отримані залежності загальні для ведених ланок механізмів, які шарнірно з'єднані з кривошипом. Для кожного механізму потрібно лише знайти закон повороту веденої ланки в системі рухомого тригранника. Нами наведено деякі приклади знаходження закону повороту веденої ланки для деяких механізмів, а також побудовано графіки зміни швидкості та прискорення окремих точок веденої ланки.

Ключові слова: механізм, кривошип, тригранник Френе, траєкторія, швидкість, прискорення, вектор, точка, шарнір, ведуча ланка.

DOI: <https://doi.org/10.32845/msnau.2019.4.11>

Постановка проблеми. Кінематичний аналіз плоских механізмів дає можливість знаходити положення ланок, траєкторій, швидкостей і прискорень окремих точок ланки. Досить довго такі розрахунки проводились графічними та графоаналітичними методами. Поява комп'ютерної техніки дозволяє виконувати ці розрахунки на новому рівні залучаючи аналітичний апарат.

Як один із можливих способів вирішення подібних задач нами пропонується використати дві системи координат: рухоми (супровідний тригранник кола) та нерухоми. Відомо, що кут повороту тригранника по відношенню до нерухомої системи координат дорівнює куту повороту кривошипа механізму. Виходячи з цього з'являється можливість дослідження руху веденої ланки, один кінець якої співпадає з вершиною тригранника у системі тригранника. Всі кінематичні характеристики перераховуються в проєкціях на осі нерухомої системи координат.

Аналіз останніх досліджень. Для більшості задач по синтезу механізмів має велике значення дослідження траєкторних кривих точок ланок механізму. До таких задач відносяться задачі створення механізмів, які могли б відтворювати наперед задані криві. Такі задачі вирішувались академіком П.Л. Чебишовим [1]. В прикладній геометрії є праці, які також присвячені знаходженню кінематичних характеристик плоских механізмів [2-4]. В монографії [5] наведено знаходження

множини траєкторних кривих, що утворені за допомогою планетарних механізмів. В праці [6] показано кінематику руху відрізка в площині за заданими умовами, а в праці [7] для визначення положень ланок плоского механізму використано тригранник Френе.

Мета роботи. Метою статті є отримання загальних залежностей для визначення всіх необхідних кінематичних характеристик веденої ланки плоских механізмів: сім'ї положень, траєкторій руху окремих точок, їх швидкостей і прискорень.

Виклад основного матеріалу. У попередніх статтях [8-10] нами розглядався складний рух плоских механізмів. При русі ланки АВ точка А рухається по колу, а точка В описує певну криву. Рух ланки АВ характерний для плоских механізмів із кривошипом ОА, шарнірно з'єднаним із веденою ланкою АВ у точці А. Траєкторією точки А у таких механізмах завжди буде коло (рис. 1,б), а траєкторією точки В – певна крива, яка залежить від закономірності повороту ланки АВ у системі рухомого тригранника Френе навколо його вершини. Ця закономірність визначається для кожного механізму окремо.

Напрямною кривою тригранника є коло радіуса r , для якого кривина є величина, обернена радіусу: $k = 1/r - const$. Розташуємо рухомий супровідний тригранник таким чином,

що орт \bar{n} головної нормалі тригранника збігається з кривошипом OA при його обертанні, орт $\bar{\tau}$ є дотичним до кола. У нашому випадку кут ψ повороту кривошипа OA буде рівним

куту повороту орта дотичної α (рис. 1,а). Отже, $\psi = \alpha = ks$ згідно із $\alpha = \int k ds$.

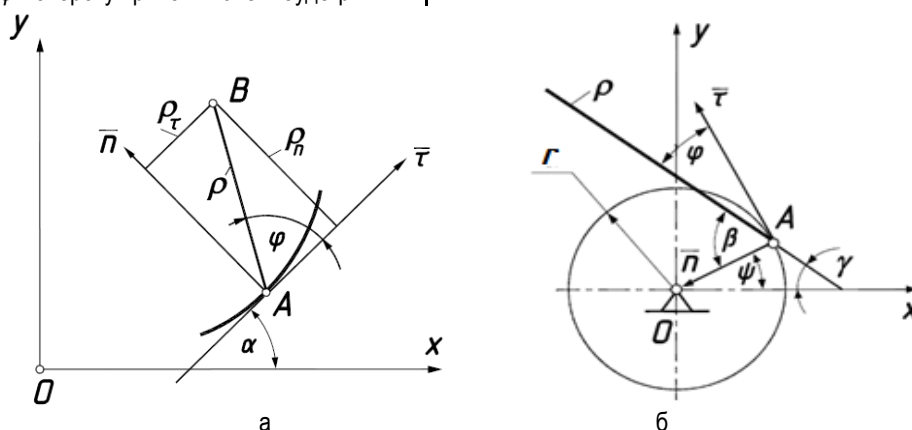


Рис. 1. Ілюстрації до схеми роботи дволанкового плоского механізму:
а) положення ланки AB у системі супровідного тригранника кривої;
б) ланка ρ у системі тригранника кола – траєкторії точки A кривошипа OA

При обертанні кривошипа з постійною кутовою швидкістю ω його точка A , яка є вершиною тригранника, рухається з постійною швидкістю $V = \omega r = \omega/k$. Ця ж точка є початком веденої ланки ρ , яка утворює з ортом $\bar{\tau}$ кут φ і з віссю Ox кут γ (рис. 1, б). Між кутами ψ , φ , і γ існує взаємозв'язок, з якого можна знайти кут φ :

$$\varphi = 90^\circ - (\gamma + ks). \quad (1)$$

Формула (1) є спільною для всіх плоских механізмів із кривошипом, а закономірність зміни кута $\gamma = \gamma(s)$ потрібно знаходити для кожного конкретного механізму. Зважаючи на те, що $k = const$ і $\int k ds = ks$, параметричні рівняння ([9], С. 92, формула (1)), траєкторії точки B у нерухомій системі набирають вигляду:

$$\begin{aligned} x_B &= \rho \cos(\varphi + ks) + \frac{1}{k} \sin(ks); \\ y_B &= \rho \sin(\varphi + ks) - \frac{1}{k} \cos(ks). \end{aligned} \quad (2)$$

У нашому випадку відстань ρ буде постійною величиною, яка дорівнює відстані від шарніра A до заданої точки веденої ланки. У зв'язку з цим вирази для знаходження абсолютної швидкості точки веденої ланки AB запишуться спрощено:

$$\begin{aligned} V_\tau &= \frac{\omega}{k} [1 - \rho(k + \varphi') \sin \varphi]; \\ V_n &= \frac{\omega}{k} \rho(k + \varphi') \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Проекції абсолютного прискорення W теж спрощуються й набирають вигляду:

$$\begin{aligned} W_\tau &= -\frac{\omega^2}{k^2} [\rho \varphi'' \sin \varphi + \rho(k + \varphi')^2 \cos \varphi]; \\ W_n &= \frac{\omega^2}{k^2} [\rho \varphi'' \cos \varphi - \rho(k + \varphi')^2 \sin \varphi + k]. \end{aligned} \quad (4)$$

Величину швидкості (3) і прискорення (4) знаходимо як корінь квадратний із суми квадратів складових, тобто, як векторну суму. Якщо треба знати напрям вектора швидкості або прискорення, то від проекцій (3) і (4) потрібно переходити до проекцій на осі нерухомої системи з огляду на відомий кут між рухомою й нерухомою системами $\alpha = ks$.

Для демонстрації розробленого підходу кінематичного аналізу плоских механізмів розглянемо конкретні приклади. При русі ланки плоского механізму виникають прискорення, які потрібно враховувати при силовому аналізі. Сукупність елементарних сил інерції ланки може бути замінена силою інерції, прикладеною в центрі мас цієї ланки, тобто в певній її точці. Ми будемо визначати абсолютні швидкість і прискорення в заданій точці веденої ланки. Для цього розглянемо деякі механізми.

Задача 1. Візьмемо дезаксіальний кривошипно-повзунний механізм (рис. 2).

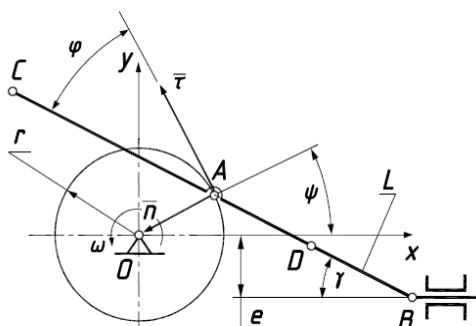


Рис. 2. Схема дезаксильного кривошипно-повзунного механізму

Знайдемо кінематичні характеристики різних точок шатуна L . Щоб знати закономірність зміни кута φ (1), необхідно знайти закон зміни кута $\gamma = \gamma(s)$. Для цього використаємо той факт, що ордината точки A для кривошипа OA і шатуна $AB = L$ загальна. Для точки A – кінця кривошипа OA запишемо:

$$y_A = r \sin \psi = \frac{1}{k} \sin(ks). \quad (5)$$

Для точки A – кінця шатуна $AB = L$ запишемо:

$$y_A = L \sin \gamma - e. \quad (6)$$

Прирівнявши між собою вирази (5) і (6) і вирішивши щодо кута γ , отримаємо:

$$\gamma = -\arcsin \frac{ek + \sin(ks)}{Lk}. \quad (7)$$

Відповідно до (1) вираз для кута φ набуває вигляду:

$$\varphi = 90^\circ - ks + \arcsin \frac{ek + \sin(ks)}{Lk}. \quad (8)$$

Для знаходження швидкості й прискорення довільної точки шатуна необхідно мати першу й другу похідні виразу (8). Перша похідна має вигляд:

$$\varphi' = \frac{k \cos(ks)}{\sqrt{L^2 k^2 - (ek + \sin(ks))^2}} - k. \quad (9)$$

Другу похідну отримуємо диференціюванням виразу (9):

$$\varphi'' = \frac{2k^2(1 + e^2 k^2 - L^2 k^2) \sin(ks)}{2[L^2 k^2 - (ek + \sin(ks))^2]^{3/2}} + \frac{ek^3(3 - \cos(2ks))}{2[L^2 k^2 - (ek + \sin(ks))^2]^{3/2}}. \quad (10)$$

Вирази (8), (9) і (10) дозволяють знаходити всі кінематичні характеристики будь-якої точки шатуна L при заданій відстані ρ від точки A . На рис. 3 побудовані положення шатуна $AB = L$ із певною щільністю повороту кривошипа OA із приростом кута на величину $k\Delta s$ у межах неповного його оберту. Траєкторія початкової точки шатуна (точки A) визначалася за рівняннями (2) при $\rho = 0$. Траєкторія точки B визначалася за цими формулами при $\rho = AB = L$. Сполучення цих точок прямолінійним відрізком при певному значенні параметра s дає положення шатуна у вигляді відрізка прямої.

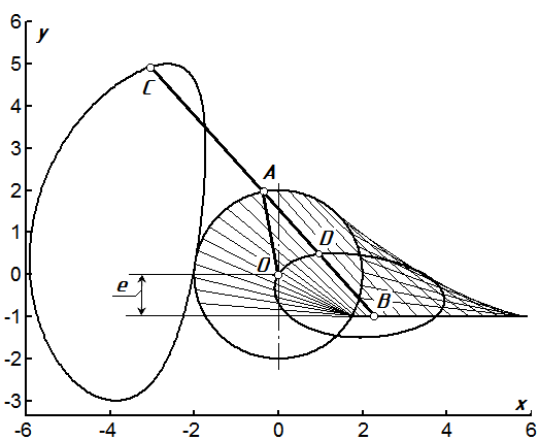


Рис. 3. Однопараметрична множина положень шатуна й траєкторії його окремих точок

На рис. 3 крім положень шатуна AB побудовано траєкторії його окремих точок за рівняннями (2). При $\rho = 0$ отримуємо коло – траєкторію руху шарніра. При $\rho = AB = L$ отримуємо пряму лінію – траєкторію руху повзуну (точки B). Цим підтверджується достовірність отриманих результатів.

Також на рис. 3 зображена траєкторія точки A , побудована при $\rho = 0$, а також траєкторії точок: B – при $\rho = AB = 4$ м, C – при $\rho = -4$ м, D – при $\rho = L/2 = 2$ м. Кривина $k = 0,5$ м⁻¹, $e = 1$ м.

Розглянемо побудову швидкостей точок шатуна. Зробимо це таким чином, щоб наочно було видно напрямки і величину швидкості вздовж траєкторії руху точки. Для цього перейдемо від проєкції швидкості на орти тригранника (3) до проєкції на осі нерухомої системи координат, повернувши їх на кут $\alpha = ks$:

$$\begin{aligned} V_x &= V_\tau \cos(ks) - V_n \sin(ks); \\ V_y &= V_\tau \sin(ks) + V_n \cos(ks). \end{aligned} \quad (11)$$

Залежно від положення шатуна (змінної s) можна знайти координати певної точки (наприклад, точки C при $\rho = -4$) за виразами (2). До координат цієї точки необхідно додати знайдений вектор (11), попередньо помножений на масштабний коефіцієнт m . В результаті отримаємо координати кінця вектора швидкості:

$$\begin{aligned} x_V &= x_C + mV_x; \\ y_V &= y_B + mV_y. \end{aligned} \quad (12)$$

Поєднавши точку з координатами x_C і y_C на траєкторії з координатами кінця вектора x_V і y_V відрізком, отримуємо вектор швидкості в цій точці траєкторії. Збільшуючи змінну s на деяку величину Δs ми зможемо побудувати вектори вздовж траєкторії з необхідною щільністю.

На рис. 4 побудовані вектори швидкостей для точок C і D . Однак наочність погіршується на ділянках траєкторії, наближених до прямої лінії і взагалі зникає на прямолінійних ділянках (наприклад, для траєкторії точки B). Зважаючи це, для такого випадку, можна побудувати графік зміни швидкості вздовж траєкторій руху точок за величиною.

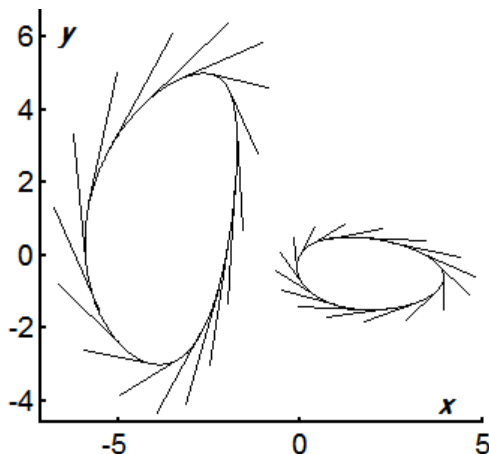


Рис. 4. Розподіл векторів швидкості уздовж траєкторій руху точок C і D

На рис. 5 побудовано графік зміни швидкості для 4-ох точок шатуна, позначених на рис. 3.

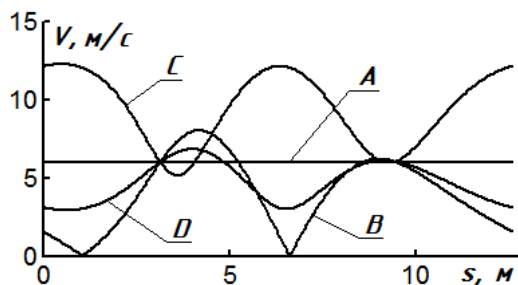


Рис. 5. Графік зміни величини швидкості точок шатуна

Із графіка (рис. 4) видно, що швидкість руху точки A постійна, а швидкість точки B у певний момент дорівнює нулю (у крайніх положеннях повзуна).

У такій же послідовності будемо вектори прискорень, використовуючи вирази (4). На рис. 6 показано наочно розподіл векторів прискорень уздовж траєкторій точок A , C і D , а на рис. 7 – графіки зміни їх величини.

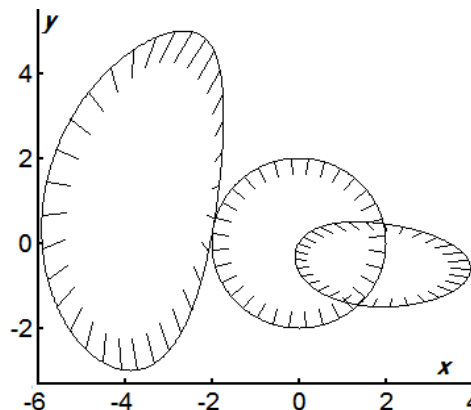


Рис. 6. Розподіл векторів прискорень уздовж траєкторій руху точок A , C і D

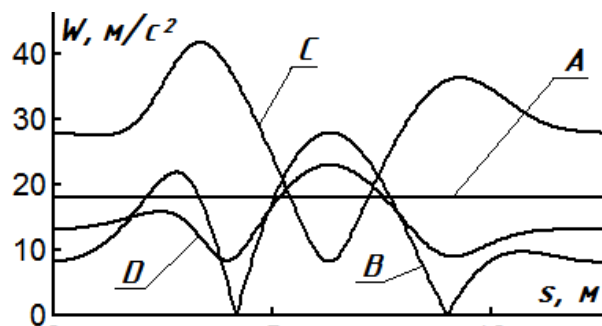


Рис. 7. Графік зміни величини прискорень точок шатуна

Для можливості роботи механізму повинні дотримуватися необхідні співвідношення між його конструктивними параметрами. Це з'ясуємо з виразу (7), у якого дріб по абсолютній величині не повинен перевищувати одиницю.

На рис. 8 показані деякі положення шатуна й траєкторії окремих точок при таких граничних значеннях конструктивних параметрів: $k = 0,5 \text{ м}^{-1}$, $e = 2 \text{ м}$, $L = 4 \text{ м}$. У крайньому положенні повзуна шатун збігається з кривошипом уздовж вертикальної лінії.

На рис. 9 побудовані вектори прискорень уздовж траєкторій точок A , C і D . Маючи аналітичні вирази для побудови векторів швидкостей і прискорень, достатньо просто й швидко отримувати їх наочний розподіл уздовж траєкторій при зміні конструктивних параметрів і місця розташування точки на шатуні.

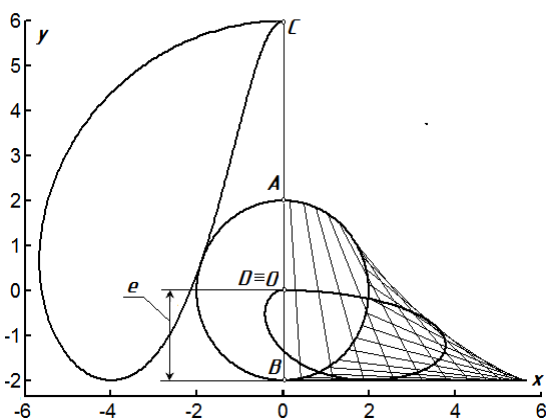


Рис. 8. Однопараметрична множина положень шатуна й траєкторії його окремих точок

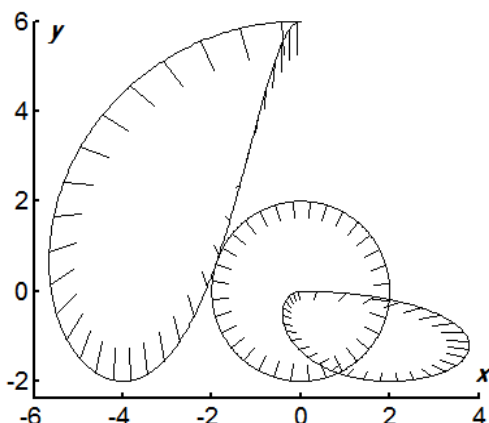


Рис. 9. Розподіл векторів прискорень уздовж траєкторій руху точок A, C і D

Задача 2. Ще один механізм із граничними значеннями конструктивних параметрів ($k = 0,5 \text{ м}^{-1}$, $e = 1 \text{ м}$, $L = 3 \text{ м}$) показаний на рис. 9. На ньому теж зображені деякі положення шатуна й траєкторії точок A, B, C і D. У крайньому положенні повзуна шатун, як і в попередньому випадку, збігається з кривошипом уздовж вертикальної лінії.

На рис. 11 побудовані траєкторії точок A, C і D із векторами прискорень для механізму (5). За щільністю розташування векторів уздовж траєкторії можна судити про швидкість руху точки. Наприклад, для точки C у верхній частині траєкторії щільність розташування векторів нижча, отже, швидкість руху точки буде більшою.

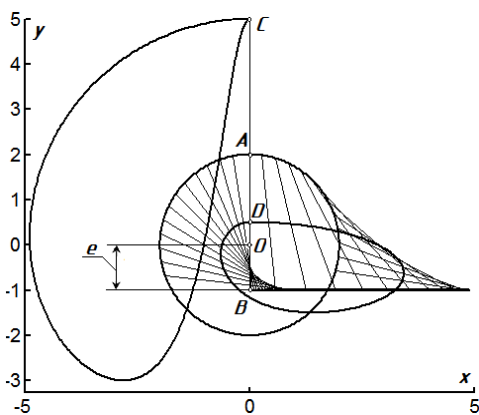


Рис. 10. Однопараметрична множина положень шатуна й траєкторії його окремих точок

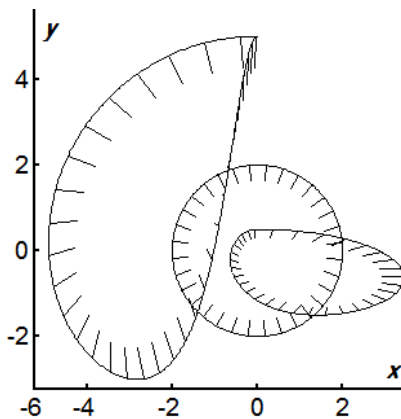


Рис. 11. Розподіл векторів прискорень уздовж траєкторій руху точок A, C і D

Задача . Для порівняння розглянемо ще один механізм – кривошипно-коромисловий із точками A, C, D на коромислі (рис. 12).

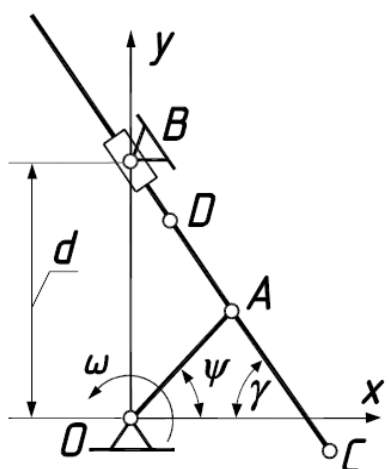


Рис. 12. Схема кривошипно-коромислового механізму

Характерною особливістю кривошипно-коромислового механізму є те, що точка A коромисла рухається по колу, а точка B нерухома. Це забезпечується ковзанням коромисла в коливальному або обертальному камені, закріпленому в точці B.

Для знаходження закономірності зміни кута φ (1) необхідно знати вираз для кута γ . Напрямний вектор коромисла знайдемо як відрізок, що з'єднує точку A із координатами $\{\cos(ks)/k, \sin(ks)/k\}$ із нерухомою точкою з координатами $\{0, d\}$.

Координатами прямого вектора є $\{\cos(ks)/k, d - \sin(ks)/k\}$. Кут γ між напрямним вектором коромисла і віссю Oх визначиться з виразу:

$$\gamma = \arccos \frac{\cos(ks)}{\sqrt{\cos^2 ks + (kd - \sin ks)^2}} = \arccos \frac{\cos(ks)}{\sqrt{1 + k^2 d^2 - 2kd \sin ks}} \quad (13)$$

Згідно виразу (1) вираз для кута φ запишеться:

$$\varphi = 90^\circ - ks - \arccos \frac{\cos(ks)}{\sqrt{1 + k^2 d^2 - 2kd \sin ks}} \quad (14)$$

Знаходимо першу й другу похідні виразу (14):

$$\varphi' = -\frac{k(2 + d^2 k^2 - 3dk \sin ks)}{1 + k^2 d^2 - 2kd \sin ks} \quad (15)$$

$$\varphi'' = \frac{dk^3(d^2 k^2 - 1)\cos ks}{(1 + k^2 d^2 - 2kd \sin ks)^2} \quad (16)$$

Вирази (14), (15), (16) достатньо, щоб побудувати всі кінематичні характеристики точок коромисла.

На рис. 13,а побудовані деякі положення коромисла й траєкторії точок А, С і D при $k = 0,5 \text{ м}^{-1}$, $d = 4 \text{ м}$ і віддаленні точок С і D від точки А на відстань $\rho = \pm 4 \text{ м}$. На рис. 13,б побудовано наочне зображення векторів прискорень цих точок уздовж траєкторій їх руху.

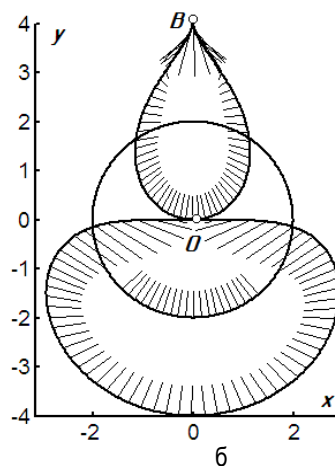
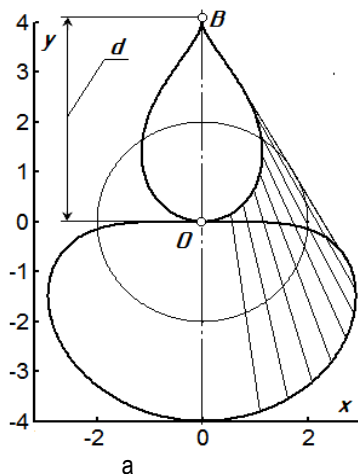


Рис. 13. Зображення кінематичних елементів кривошипно-коромислового механізму:
а) траєкторії точок і деякі положення коромисла;
б) розподіл векторів прискорень уздовж траєкторій

Аналізуючи вираз (13), можна побачити, що в разі $1/k = r = d$ кутове прискорення коромисла в системі тригранника буде рівним нулю, тобто кутова швидкість його повороту буде сталою. Сім'ю положень коромисла такого механізму показано на рис. 14. Його характерною особливістю є те, що в разі відсутності відрізка AC рисунок із зображенням сім'ї положень не змінився б. При підйомі точка D, рухаючись по внутрішній кривій, після проходження точки B починає рухатися по зовнішній кривій і з часом займає місце точки C. Відрізок коромисла AD по черзі займає внутрішню й зовнішню області, які розмежовують коло – траєкторія точки А.

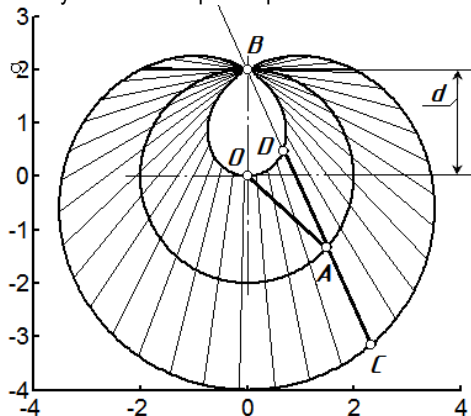


Рис. 14. Траєкторії точок і положення веденої ланки в окремому випадку кривошипно-коромислового механізму

Якщо при роботі механізму, який зображений на рис. 12, за умови, що $d > r$, камінь хитається, то при $d = r$ (рис. 14)

він уже обертається. Ще одна ілюстрація до механізму з каменем, що обертається, при $d < r$ показана на рис. 15.

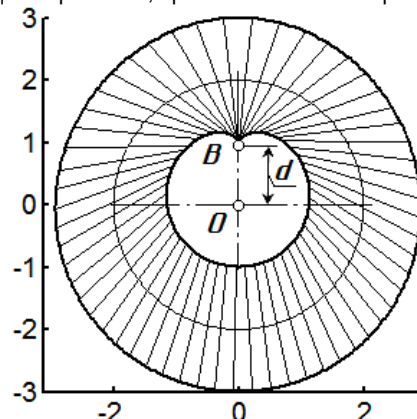


Рис. 15. Траєкторії точок і положення коромисла механізму при $k = 0,5$ і $d = 1$

Задача 4. Розглянемо ще один плоский механізм – так званий лямбдаподібний механізм Чебишова, який дістав назву за подібність у середньому положенні до грецької літери λ (рис. 16,а). Він визначається трьома незалежними параметрами – відстанями r , b і d . Він належить до напрямних механізмів (так званих прямих) і призначений для забезпечення ділянки траєкторії точки B, максимально наближеної до прямої лінії [4]. При цьому $AC = CB = b$ (рис. 16,а) і між величинами r , b і d мають витримуватися певні залежності в заданих межах [4].

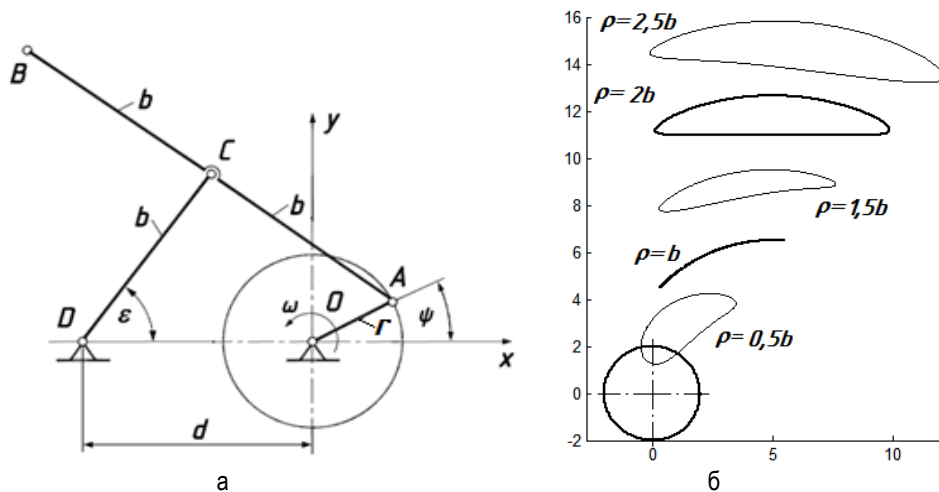


Рис. 16. Графічні ілюстрації до схеми роботи лямбдаподібного механізму Чебишова:
 а) схема механізму із зазначенням трьох параметрів r, b і d ;
 б) траєкторії окремих точок ланки AB при роботі механізму

Наша задача – підібрати серед зазначених меж такі значення параметрів r, b і d , щоб ділянка траєкторії точки B стала максимально наближена до відрізка прямої. Для цього потрібно встановити закономірність зміни кута γ , який входить до спільної для всіх розглянутих механізмів формули (1).

Спочатку знайдемо взаємозв'язок між кутами ψ і ε (рис. 16,а). Виходитимемо із того, що ланки AB і BC мають спільну точку C (рис. 16,а). Запишемо проекції ланок OA, AC і BC на осі Ox і Oy . Проекції кінця A ланки OA запишуться через її довжину r (рис. 1,б):

$$x_A = r \cos \psi; \quad y_A = r \sin \psi. \quad (17)$$

Проекції кінця C ланки AC запишуться, огляду на умову, що вона проходить через точку A , координати якої знайдені в (17):

$$\begin{aligned} x_C &= r \cos \psi - b \cos \gamma; \\ y_C &= r \sin \psi + b \sin \gamma. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\gamma = \arccos \left[\frac{d^3 + r(r^2 + 3d^2) \cos \psi}{2bA} + \frac{r^2 d(2 + \cos 2\psi) + r \sin \psi \sqrt{A(4b^2 - A)}}{2bA} \right], \quad (21)$$

$$\text{де } \psi = ks, \quad A = r^2 + d^2 + 2rd \cos ks.$$

Виразу кута γ (21) достатньо, щоб розрахувати й побудувати кінематичні характеристики будь-якої точки веденої ланки AB . Для цього знаходимо закономірність $\varphi = \varphi(s)$ за формулою (1), беремо її першу і другу похідні й використовуємо в спільних залежностях, як це зроблено в розглянутих перед цим механізмах.

На рис. 16,б побудовано траєкторії точок на різних відстанях від точки A . Траєкторію точки B ми отримали при $\rho = 2b$, що є симетричною кривою із прямолінійною ділянкою. Подібна крива наведена на рис. 80 ([4] С. 171). Її вдалося побудувати шляхом підбору параметрів $r = 2, b = 6,5$ і $d = 5$ із рекомендованих співвідношень і їх меж. При $\rho = b$ отримуємо дугу кола радіуса b , що зрозуміло із принципу роботи механізму. Це свідчить про достовірність отриманих результатів. На

З іншого боку, запишемо проекції кінця C ланки DC , базуючись на умові, що вона проходить через точку D із координатами $\{-d, 0\}$:

$$\begin{aligned} x_C &= -d + b \cos \varepsilon; \\ y_C &= b \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (19)$$

Прирівнявши попарно між собою координати точки C у (18) і (19), одержимо систему двох рівнянь із двома невідомими кутами ε і γ (кут ψ відомий, оскільки кривошип обертається зі сталою кутовою швидкістю й кут ψ змінюється за лінійним законом: $\psi = s/r$):

$$\begin{aligned} r \cos \psi - b \cos \gamma &= -d + b \cos \varepsilon; \\ b \sin \varepsilon &= r \sin \psi + b \sin \gamma. \end{aligned} \quad (20)$$

Розв'язуємо систему (20) відносно кутів ε і γ за допомогою програмного продукту символічної математики «Mathematica». Через громіздкість виразів наводимо розв'язок тільки для кута γ , який нам буде потрібен у подальшому:

рис. 16,б показані траєкторії інших точок ланки AB , у тому числі й коло радіуса r при $\rho = 0$.

Для ланки AB симетричну траєкторію описує тільки точка B при $\rho = 2b$ (не беручи до уваги напрямного кола). Можна прослідкувати трансформацію цієї траєкторії зміною одного із параметрів. На рис. 17,а показані шатунні криві (траєкторії точки B) при $r = 2, d = 5$ і змінні параметра b від 4 до 8 через 0,5 лінійних одиниць. На рис. 17,б показано траєкторії точок ланки AB при максимальному значенні параметра $d = 11$, при якому механізм може працювати. Траєкторія точки B перетворюється в краплеподібну симетричну криву. На рис. 17,б зображено ланку AB у крайніх положеннях із нанесеними точками, для яких в одному положенні вибрано індекс «1», а в іншому – «2».

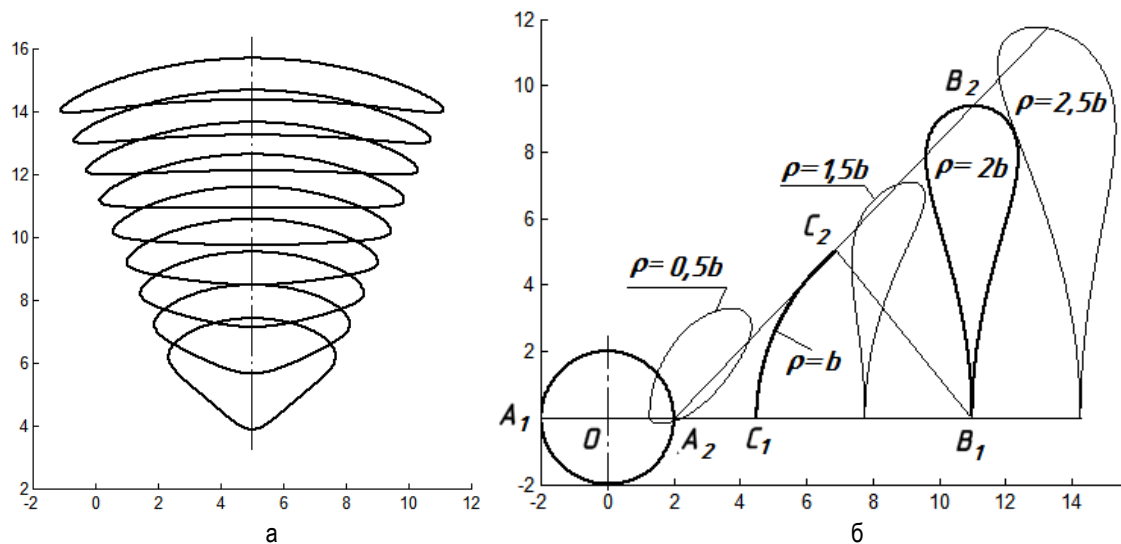


Рис. 17. Траєкторії точок ланки АВ:

- а) трансформація траєкторії точки В при зміні параметра b від 4 до 8 через 0,5 лінійних одиниць;
 б) траєкторії окремих точок ланки АВ при $r = 2$, $b = 6,5$ і $d = 11$

Векторів прискорень для даного механізму будувати не будемо, зважаючи на громіздкість виразу (21), що призведе ще до більш громіздких виразів похідних. При побудові траєкторних кривих точок веденої ланки показано можливість пошуку траєкторій потрібної форми, включаючи прямолінійні ділянки, за рахунок зміни конструктивних параметрів механізму.

Висновок. Запропонований підхід дає можливість будувати зображення розподілу векторів швидкостей і прискорень

точок веденої ланки вздовж їх траєкторії руху з необхідною щільністю за спільною програмою. Для цього в цю програму слід ввести закон повороту веденої ланки в системі тригранника Френе, який визначається для кожного механізму окремо.

Такий спосіб дає можливість аналізу кінематичних характеристик плоских механізмів з допомогою комп'ютера, що значно пришвидшує та спрощує процес отримання результатів.

Список використаної літератури:

1. Левитская О. Н., Левитский Н. И. Курс теории механизмов и машин. 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Высшая школа, 1985. 279 с.
2. Бергер Э. Г., Табацков В. П. Способ геометрического и механического образования рациональных кривых 3-го и 4-го порядка. Прикл. геометрия и инж. графика. Київ : Будівельник, 1982. Вып. 33. С. 88–89.
3. Потишко А. В., Кобезская В. С. Воспроизведение некоторых спиралей. Прикл. геометрия и инж. графика. Київ : Будівельник, 1971. Вып. 13. С. 84–85.
4. Зубащенко Г.П., Корченко О.Г., Попкова Т.В., Макаренко М.Г., Щербина В. П. Геометричні методи кінематичного аналізу плоских важільних механізмів вищих класів. Прикл. геометрія та інж. графіка. Київ : КНУБА, 2007. Вып. 77. С. 80–84.
5. Росоха С. В., Куценко Л. М. Геометричне моделювання об'ємів робочих камер роторно-планетарних трохоїдних машин. Харків : УЦЗУ, 2007. 176 с.
6. Пилипака С. Ф., Бабка В. М., Пилипака Т. С. Кінематика відрізка, кінці якого описують задані лінії у площині. Прикл. геометрія та інж. графіка. Київ : КНУБА, 2007. Вып. 77. С. 36–42.
7. Чепіжний А. В., Бабка В. М. Визначення положень ланок плоского механізму за допомогою системи тригранника Френе. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ : КНУБА, 2012. Вып. 90. С. 20–26.
8. Pylypaka S., Chepyzhnyi A., Kresan T.. Determining Kinematic Characteristics of Planar Mechanisms' Driven Member Using Frenet Trihedron. ТЕКА. Commission of motorization and energetics in agriculture. 2017. Vol. 17. No. 3. P. 15–23.
9. Чепіжний А. В., Пилипака С. Ф. Визначення траєкторій і прискорень окремих точок плоских механізмів з допомогою тригранника Френе. Науковий вісник НУБіП України : Серія «Техніка та енергетика АПК». 2017. Вып. 258. С. 91–105.
10. Чепіжний А. В. Визначення положень і швидкостей ланок плоских механізмів з допомогою тригранника Френе. Сучасні проблеми моделювання : зб. наук праць. МДПУ ім. Б. Хмельницького. Мелітополь : МДПУ, 2016. Вып. 7. С. 166–171.

Pylypaks S., National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine (Ukraine)

Chepizhnyi A., Sumy National Agrarian University (Ukraine)

General approach to finding the kinematic characteristics of the drives of plane mechanisms with the application of frene-serret frame and frenet formulas

The crank pivotally linked to the mechanism link for most planar mechanisms is a driven link. The junction point of the crank and the slave link describes the circle as it is rotated. In the article, we propose to place the apex of the triangles at the point of connection. In this case, we will direct the principal normal normal to the center of the circle, and arrange the tangent tangent tangent

to the circle (combine with the velocity vector of the crank). Based on this location, the crank will also rotate when rotating the crank, with the main normal being the same as the crank. The trajectories and speed of the crank in a circle will depend on the angular speed of rotation of the crank.

The basic idea of the article is to find the kinematic characteristics of the motion of the junction point of the crank and the driven link, when it makes relative motion in the coordinate system, and the moving system moves relatively stationary under a certain law. Thus the rotation of the driven link around the apex of the triangles and the movement together with it determines the motion of the driven link with respect to the fixed coordinate system.

The position of the guided link is in the projections on the triangular orths and is converted to the axis of the fixed system. In the same way, we find the absolute trajectory of movement of the point of the link, which in turn allows us to determine the speed and acceleration of the same point. The dependencies obtained are common to the driven links of the mechanism pivotally connected to the crank. For each mechanism it is only necessary to find the law of rotation of the driven link in the system of rolling triangles. We give some examples of finding the law of the rotation of the driven link for some mechanisms, as well as graphs of change of speed and acceleration of individual points of the driven link.

Keywords: mechanism, crank, Frenet trihedron, trajectory, speed, acceleration, vector, point, hinge, driving link.

Дата надходження до редакції: 07.12.2019