УДК 631.312

АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ СПОСОБІВ АНАЛІТИЧНОГО ОПИСУ СКЛАДНОГО РУХУ ТОЧКИ ТА ЗНАХОДЖЕННЯ ЇЇ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Пилипака Сергій Федорович
доктор технічних наук, професор
Національний університет біоресурсів і природокористування України
ORCID: 0000-0002-1496-4615
email: psf55@ukr.net

Чепіжний Андрій Володимирович
кандидат технічних наук, доцент
Сумський національний аграрний університет
ORCID: 0000-0002-7540-8313
email: snau170287@gmail.com

При дослідженні руху точки обирають певну систему відліку, відносно якої розглядають рух точки. Іноді доводиться розглядати рух точки відносно двох різних систем відліку. Наприклад, рух пасажира в потязі можна аналізувати відносно потяга та відносно Землі. При цьому рух однієї і тієї ж точки відносно двох різних систем відліку буде різним. Наприклад, точка ободу колеса залізничного вагона, що рухається, відносно Землі опише циклоїду, а відносно вагона – коло.

При розгляді руху точки відносно до двох систем відліку система, яка в цій задачі умовно прийнята за нерухому, називається основною системою відліку (нерухомою), а інша, яка рухається відносно основної – рухомою системою відліку. Рух точки відносно основної системи відліку називається абсолютним рухом, а її рух відносно рухомої системи відліку – відносним рухом. Складним рухом точки називається такий рух точки, за якого вона одночасно бере участь у двох або більше рухах.

Можливість розкласти більш складний рух точки або тіла на простіші рухи шляхом уведення додаткової (рухомої) системи відліку широко використовується при кінематичних розрахунках і визначає практичну цінність теорії складного руху. Крім того, результати цієї теорії використовуються в динаміці для вивчення відносної рівноваги й відносного руху тіл під дією прикладених сил.

***Ключові слова**: тригранник, площина, складний рух, абсолютна швидкість, напрямна крива, плоский механізм, рух частинки.*

DOI: https://doi.org/10.32845/msnau.2020.3.2

Постановка проблеми. Теорія складного руху матеріальної точки має чітку завершену форму й наведена в усіх підручниках із теоретичної механіки. Вона ґрунтується на тому, що рух точки вивчається одночасно відносно до двох систем координат. Одна із них (основна) приймається за нерухому, а друга здійснює відносно до нерухомої відносний рух по заданому закону. В свою чергу у рухомій системі координат здійснює відносний рух матеріальна точка. Сума цих рухів (відносного і переносного) складає абсолютний рух точки відносно основної системи координат. Рухи (як переносний, так і відносний) задаються залежностями у функціях часу.

Відомий також натуральний (природний) спосіб задання руху матеріальної точки, за якого швидкість і прискорення розглядаються в проекціях на орти супровідного тригранника траєкторії (тригранника Френе). При цьому розглядається тільки простий рух точки.

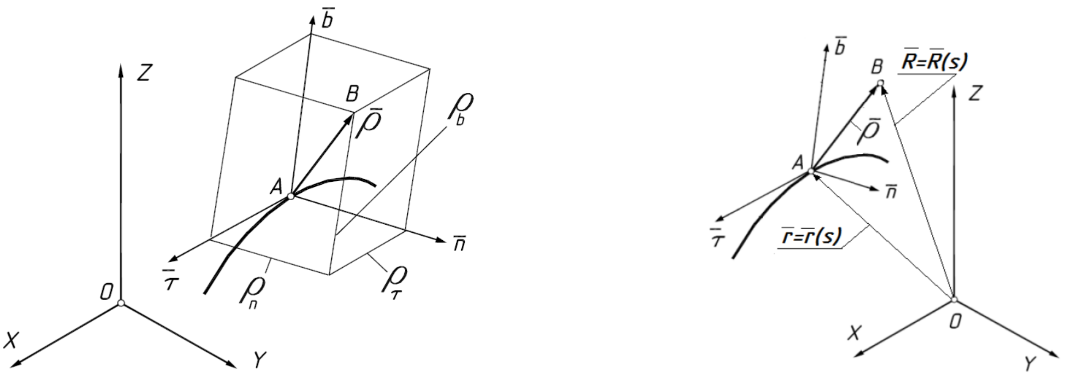
Аналіз останніх досліджень. Відомі приклади із застосуванням тригранника й формул Френе під час розгляду руху твердого тіла в його системі, наприклад, літака [1]. Кінематика супровідного тригранника гвинтової лінії розглядається у праці [2]. В останніх виданнях підручників кінематика супровідного тригранника траєкторії, як твердого тіла, або взагалі не досліджується, або ж розглядається із посиланням на більш ранні видання [3]. Тим часом тригранник і формули Френе можна успішно використовувати в задачах кінематики й динаміки складного руху матеріальної точки.

Формування цілі статті. Показати доцільність застосування супровідного тригранника кривої і формул Френе в теорії складного руху матеріальної точки на площині.

Виклад основного матеріалу дослідження. Із диференціальної геометрії відомо, що в будь-якій точці кривої можна побудувати три взаємно перпендикулярні напрями, одиничні орти вздовж яких (дотична $\bar{\tau}$, головна нормаль $\bar{n}$ і бінормаль $\bar{b}$) утворюють супровідний (натуральний) тригранник кривої або тригранник Френе. Для плоскої кривої орти $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$ знаходяться в площині кривої, а орт $\bar{b}$ перпендикулярний до неї (рис. 1, а).

Нами запропоновано взяти за рухому систему супровідний тригранник Френе напрямної просторової кривої. Незалежний параметр у цьому випадку – довжина дуги *s* напрямної кривої.

Переносний рух тригранника стає визначеним і залежить від кривини $k = k(s)$ і скруту $\delta = \delta(s)$ кривої. Точка *B* у триграннику задається вектором $\bar{\rho} = \bar{\rho}(s)$, який розписується в проекціях на орти дотичної $\bar{\tau}$, головної нормалі $\bar{n}$ і бінормалі $\bar{b}$ тригранника: $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$, $\rho_n = \rho_n(s)$, $\rho_b = \rho_b(s)$ (рис. 1,а). Радіус-вектор $\bar{R}$ точки *B* запишеться сумою двох векторів (рис. 1,б): $\bar{R} = \bar{r} + \bar{\rho}$, де $\bar{r} = \bar{r}(s)$ – вектор точки *A* (вершини тригранника) у нерухомій системі координат *Oxyz*. Таким чином, положення точки *B* можна записати одним векторним рівнянням:



а б

Рис. 1. До аналітичного опису розміщення точки *B* у двох системах координат

$$\overline{R_B} = \overline{r_A} + \bar{\tau}\rho_\tau + \bar{n}\rho_n + \bar{b}\rho_b \qquad (1)$$

Абсолютна швидкість V_B і прискорення W_B точки *B* знаходяться послідовним диференціюванням виразу її радіус-вектора (1) із переходом від часу *t* до змінної *s*:

$$\begin{aligned} \overline{V_B} &= \frac{d\overline{R_B}}{dt} = \frac{d\overline{R_B}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = V_A\frac{d\overline{R_B}}{ds}; \\ \overline{W_B} &= \frac{d\overline{V_B}}{dt} = \frac{d\overline{V_B}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = V_A^2\frac{d^2\overline{R_B}}{ds^2}, \end{aligned} \qquad (2)$$

де $ds/dt = V_A$ – швидкість руху тригранника по напрямній кривій.

Зі свого боку

$$\frac{d\overline{R_B}}{ds} = \frac{d\overline{r_A}}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\bar{\tau}\rho_\tau\right) + \frac{d}{ds}\left(\bar{n}\rho_n\right) + \frac{d}{ds}\left(\bar{b}\rho_b\right) . \qquad (3)$$

Відомо, що $d\overline{r_A}/ds = \bar{\tau}$, диференціювання виразів у дужках (3) відбувається за правилом диференціювання добутку, наприклад, $\left(\bar{\tau}\rho_\tau\right)' = \bar{\tau}'\rho_\tau + \bar{\tau}\rho'_\tau$. Але $\bar{\tau}'$ є однією із відомих формул Френе:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{n}k; \;\; \frac{d\bar{n}}{ds} = \bar{b}\delta - \bar{\tau}k; \;\; \frac{d\bar{b}}{ds} = \bar{n}\delta. \qquad (4)$$

Після диференціювання виразу (3) із підстановкою формул (4) і групуванням складових за напрямками ортів, вираз абсолютної швидкості точки *B* набуває вигляду:

$$\overline{V_B} = V_A\left[\bar{\tau}(1 - k\rho_n + \rho'_\tau) + \bar{n}(k\rho_\tau - \delta\rho_b + \rho'_n) + \bar{b}(\delta\rho_n + \rho'_b)\right]. \qquad (5)$$

Диференціювання виразу (5) із переходом від змінної *t* до *s* із застосуванням формул Френе (4) дає формулу для знаходження абсолютного прискорення в проекціях на орти тригранника:

$$\begin{aligned} \overline{W_B} = \bar{\tau}V_A&\left\{V'_A(1 - k\rho_n + \rho'_\tau) + V_A\left[\rho''_\tau - k'\rho_n - k(k\rho_\tau - \delta\rho_b + 2\rho'_n)\right]\right\} + \bar{n}V_A\left\{V'_A(k\rho_\tau - \delta\rho_b + \rho'_n) + \right. \\ &\left. V_A\left[\rho''_n - k'\rho_\tau - \delta'\rho_b + k(1 - k\rho_n + 2\rho'_\tau) - \delta(\delta\rho_n + 2\rho'_b)\right]\right\} + \bar{b}V_A\left\{V'_A(\delta\rho_n + \rho'_b) + V_A\left[\rho''_b + \delta'\rho_n + \delta(k\rho_\tau - \delta\rho_b + 2\rho'_n)\right]\right\}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Підтвердженням правильності виведеної формули є порівняння результатів, які отримані із застосуванням традиційного підходу та тригранника Френе.

Нами також розглянуто доцільність застосування тригранника і формул Френе у прямій та оберненій задачах динаміки складного руху точки.

Пряма задача динаміки передбачає пошук сил, які діють на матеріальну точку, якщо її рух відомий. Вона застосовується для силового аналізу механізмів, оскільки рух їх ланок відомий. Розглянемо застосування прямої задачі на прикладі плоских механізмів.

У багатьох плоских механізмів ведучою ланкою є кривошип, який за допомогою шарніра з'єднаний з веденою ланкою. Точка з'єднання цих ланок, тобто кінець кривошипа, під час обертання описує коло. Нами пропонується в точку з'єднання ланок помістити вершину тригранника Френе, орт головної нормалі направити до центру кола, орт дотичної поєднати з вектором швидкості кривошипа, тобто, розташувати по дотичній до кола. При обертанні кривошипа тригранник теж буде обертатися, причому його головна нормаль весь час буде збігатися з кривошипом. Таким чином, рухомий тригранник буде супровідним для кола – траєкторії руху кривошипа й швидкість руху тригранника по колу буде залежати від кутової швидкості обертання кривошипа.

Під час обертання кривошипа разом із ним буде обертатися тригранник Френе. Водночас ведена ланка, у вигляді прямолінійного відрізка, буде проходити через вершину тригранника й утворюватиме з ортом дотичної кут. Закон зміни цього кута буде залежати від конструкції й призначення механізму.

Щоб отримати кінематичні характеристики веденої ланки (його положення залежно від кута повороту кривошипа, траєкторію, швидкість і прискорення довільної точки), необхідно знати закон зміни кута повороту веденої ланки в системі рухомого тригранника в функції довжини дуги направляючої кривої – траєкторії руху шарніра.

Ідея полягає в знаходженні кінематичних характеристик складного руху точки, коли вона робить відносний рух у рухомій системі координат, а сама рухома система за певним законом рухається відносно нерухомої системи. Якщо за рухому систему координат взяти супровідний тригранник кривої, то закон руху тригранника стає відомим відносно нерухомої системи. Таким чином, поворот веденої ланки навколо вершини тригранника й одночасний рух разом з ним визначає відносний рух веденої ланки відносно нерухомої системи координат.

Положення ланки знаходиться в проекціях на орти тригранника й відразу перераховується на осі нерухомої системи. Таким же чином знаходиться абсолютна траєкторія руху точки ланки, що зі свого боку дозволяє знайти її швидкість і прискорення. Знайдені залежності є загальними для ведених ланок механізмів, які з'єднані за допомогою шарніра з кривошипом.

Під час розрахунків конкретного механізму потрібно знати тільки закон повороту веденої ланки в системі рухомого тригранника.

Дослідження траєкторних кривих руху точок ланок механізму має велике значення в задачах синтезу механізмів. Це завдання утворення механізмів, які могли б відтворювати наперед задані криві.

Обернена задача динаміки передбачає знаходження кінематичних характеристик матеріальної точки (траєкторії руху, швидкості, прискорення) за відомими прикладеними до точки силами. Для її розв'язання потрібно складати диференціальні рівняння. Обернена задача динаміки нами розглянута на прикладі розсіювальних апаратів мінеральних добрив.

У процесі проектування відцентрових розсіювальних апаратів мінеральних добрив важливо знайти такі параметри і режими роботи цих машин, які б давали якнайкращий ефект. Важливу роль у цьому відіграють лопатки, які забезпечують потрібну траєкторію і швидкість частинки у відносному русі. На сьогодні, достатньо вивчена теоретична складова роботи розсіювальних апаратів із прямолінійними лопатками. Дослідження впливу форми криволінійної лопатки на кінематичні параметри руху частинки може бути корисним під час проектування відповідних робочих органів.

Усі лопатки (як прямолінійні, так і криволінійні) кріпляться ортогонально до диска й забезпечують рух частинки по ньому в горизонтальній площині. У момент сходу частинки із диска вектор її абсолютної швидкості паралельний площині диска. Однак розсіювання частинок відбувається ефективніше, якщо вони при сході із робочого органу летять вгору під певним кутом до площини диска. Таке розсіювання забезпечують відцентрові конусні розсіювальні органи, у яких прямолінійні лопатки закріплені під певним кутом до площини диска.

Пропонуємо такі задачі розв'язувати із застосуванням тригранника Френе. Це дозволить порівняти розв'язки традиційним і запропонованим способом та їхні можливості для знаходження кінематичних характеристик складного руху матеріальної частинки по ротаційних поверхнях. Прикладом є рух частинки вздовж прямолінійної лопатки, яка закріплена в радіальному напрямі на горизонтальному диску, який обертається зі сталою кутовою швидкістю *ω*.

При традиційному способі потрібно знати три складових абсолютного прискорення в переносному, відносному рухах та прискорення Коріоліса: $\overline{W}_B = \overline{W}_e + \overline{W}_r + \overline{W}_{кор}$, де величина й напрям його $\overline{W}_{кор} = 2\omega \times V_r$ визначається за правилом Жуковського М.Є. (рис. 2,а).

Із застосуванням нашого підходу формула (6) дуже спрощується, тому що V_A=*const*, напрямною кривою переносного руху тригранника є коло, отже, *k=const, δ=0*. Крім того, головна нормаль збігається із напрямом лопатки (рис. 2,б), отже таким чином, частинка рухатиметься вздовж головної нормалі, тобто $\rho_\tau = \rho'_\tau = \rho''_\tau = 0,\ \rho_b = \rho'_b = \rho''_b = 0$.

За формулою (6) ми отримаємо такі проекції прискорення на орти тригранника:

- на орт $\overline{\tau}$:

$$\overline{W}_{B\tau} = -2V_A^2 k \rho'_n , \quad (7)$$

- на орт $\overline{n}$:

$$\overline{W}_{Bn} = V_A^2 \left(\rho'' - k\rho_n^2 + k \right). \quad (8)$$

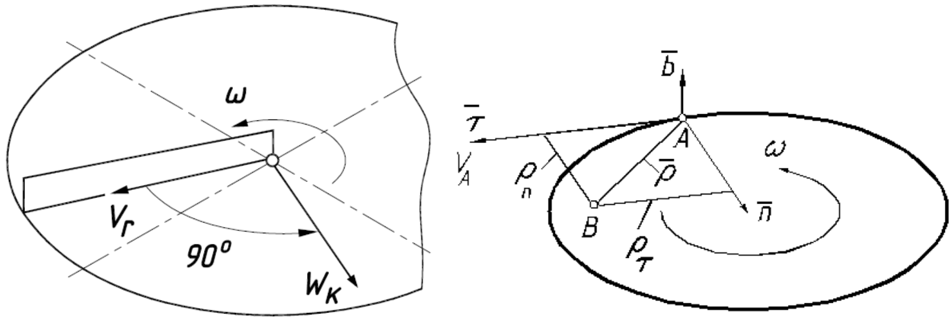


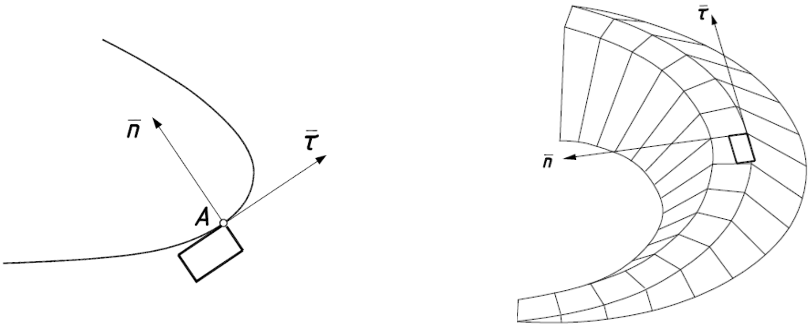
Рис. 2. До визначення прискорення точки *B*, що рухається в радіальному напрямі по диску, який обертається із кутовою швидкістю *ω*

На орт $\overline{\tau}$ ми отримали складову зі знаком «мінус». Це і є прискорення Коріоліса, тільки воно має інший вигляд, оскільки змінною є не час *t*, а довжина дуги напрямного кола *s*. Спрямоване воно в протилежну сторону орта $\overline{\tau}$, що відповідає правилу Жуковського М.Є., проте отримано автоматично.

Універсальність запропонованого методу дає можливість використовувати його у вирішенні задач, розв'язок яких традиційними методами нам невідомий. Однією з них може бути дослідження руху вантажу в кузові автомобіля (причепа), що рухається дорогою з криволінійною просторовою віссю. Ця вісь може бути й плоскою зі змінною кривиною, що характерно для повороту дороги, коли кривина зростає від нуля на прямолінійній ділянці до максимальної величини на середині повороту й знову зменшується до нуля.

Із певним припущенням вантаж, який по днищу кузова автомобіля здійснює відносний рух, можна прийняти за матеріальну точку. У такому випадку знаходження відносного переміщення вантажу в кузові при русі автомобіля дорогою із просторовою віссю зводиться до знаходження відносної траєкторії матеріальної точки. Ця задача не є простою, оскільки абсолютне прискорення точки є геометричною сумою переносного, відносного і Коріолісового прискорень, напрям і модуль кожного із яких можуть бути змінними, залежними від траєкторії, шляху й швидкості автомобіля.

Просторова крива характеризується двома параметрами, від яких залежить кінематика супровідного тригранника Френе. Такими параметрами є кривина k і скрут σ кривої. Їх значення в будь-якій точці кривої будуть визначені, якщо відомі залежності $k = k(s)$ і $\sigma = \sigma(s)$, де s – дугова координата (довжина дуги кривої). Будемо вважати, що такою просторовою кривою є вісь криволінійної ділянки дороги, яка йде на підйом або спуск (рис. 3). Якщо таку ділянку дороги взяти за напрямну криву для тригранника Френе, то можна застосувати формули (6) для знаходження вектора абсолютного прискорення. Для прямої задачі в загальному випадку потрібно мати залежності $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$, $\rho_n = \rho_n(s)$, $\rho_b = \rho_b(s)$, а для оберненої ці залежності потрібно знайти за заданими прикладеними до точки силами.



а б

Рис. 4. Схема руху вантажного автомобіля дорогою:
а) із плоскою криволінійною віссю у вигляді ланцюгової лінії;
б) із просторовою кривою у вигляді гвинтової лінії

Зважаючи на це, застосування супровідного тригранника кривої та формул Френе дає можливість описати відносний рух вантажу в кузові автомобіля (при $\rho_b = 0$, оскільки вантаж знаходиться в стичній площині тригранника), який рухається дорогою, що має просторову вісь, із постійною та змінною швидкостями.

Висновки. Тригранник і формули Френе, які мають широке застосування в диференціальній геометрії поверхонь, можуть бути використані при знаходженні вектора абсолютного прискорення точки в складному русі. У цьому випадку роль рухомої системи координат відграє сам тригранник, який рухається вздовж заданої напрямної кривої – траєкторії переносного руху. Відносний рух точка здійснює в системі тригранника. Перевага такого аналітичного опису складного руху точки полягає в тому, що для нього достатньо тільки одного векторного рівняння, послідовним диференціюванням якого знаходяться вектори абсолютної швидкості й прискорення в проекціях на орти тригранника.

Висунуто припущення, що застосування тригранника й формул Френе може бути доцільним при розв'язанні прямої й оберненої задач динаміки складного руху точки.

Список літератури:

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. Москва : ФМ, 1961. 823 с.
2. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики : в 2 т. 8-е изд. Москва : Наука, 1982. Т. 1 : Статика и кинематика. 352 с.
3. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики : в 2 т. 4-е изд., исправл. – Москва : Наука, 1985. Т.1 : Статика и кинематика. 240 с.
4. Адамчук В. В. Дослідження загального випадку розгону мінеральних добрив відцентровим розсіювальним органом. Вісник аграрної науки. Київ, 2003. № 12. С. 51–57.
5. Адамчук В. В. Теоретичне дослідження розгону мінеральних добрив розсіювальним органом. Механізація і енергетика сільського господарства. IV міжнародна науково-технічна конференція «Motrol 2003». Том 6. Київ : Національний аграрний університет, 2003. С. 19–31.
6. Адамчук В. В., Булгаков В. М., Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Дослідження руху частинки по плоскому диску, який обертається навколо перпендикулярної осі, нахиленої до горизонту. Вісник Львівського національного аграрного університету: агроінженерні дослідження. – Львів : Львів. нац. аграр. ун-т, 2008. № 12(2). С. 189–197.

Chepyzhniy A. V., *Sumy National Agrarian University (Ukraine)*
Pylypaka S. F., *National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine (Ukraine)*

Analysis of existing methods of analytical description of complex motion of a point and finding its kinematic characteristics

When studying the motion of a point, a certain frame of reference is chosen, in relation to which the motion of the point is considered. Sometimes it is necessary to consider the motion of a point relative to two different reference systems. For example, the movement of a passenger in a train can be analyzed relative to the train and relative to the Earth. The motion of the same point relative to two different reference frames will be different. For example, the rim point of the wheel of a moving railway car will describe a cycloid relative to the Earth, and a circle relative to the car.

When considering the motion of a point relative to two reference frames, the system, which in this problem is conventionally taken as stationary, is called the main frame of reference (fixed), and the other, which moves relative to the main - mobile frame of reference. The motion of a point relative to the main frame of reference is called absolute motion, and its motion relative to the moving frame of reference is called relative motion. A complex motion of a point is a motion of a point in which it simultaneously participates in two or more motions.

The ability to decompose a more complex motion of a point or body into simpler motions by introducing an additional (movable) frame of reference is widely used in kinematic calculations and determines the practical value of the theory of complex motion. In addition, the results of this theory are used in dynamics to study the relative equilibrium and relative motion of bodies under the action of applied forces.

The theory of complex motion of a material point has a clearly completed form and is given in all textbooks on theoretical mechanics. It is based on the fact that the motion of a point is studied simultaneously with respect to two coordinate systems. One of them (the main) is taken as immovable, and the other carries out relative to the immovable relative movement according to the given law. In turn, in a moving coordinate system, the material point carries out the relative motion. The sum of these motions (relative and figurative) is the absolute motion of a point relative to the basic coordinate system. Movements (both figurative and relative) are given by dependencies in time functions.

There is also a natural (natural) way to specify the motion of a material point, in which velocity and acceleration are considered in the projections on the orts of the accompanying trihedron of the trajectory (Frenet trihedron). Thus only simple movement of a point is considered.

Key words: *trihedron, plane, complex motion, absolute velocity, guide curve, planar mechanism, particle motion.*

Дата надходження до редакції: 11.11.2020