УДК 514.18

СПОСОБИ ЗНАХОДЖЕННЯ ЗАКОНУ ВІДНОСНОГО РУХУ ЧАСТИНКИ ВЗДОВЖ ПРЯМОЛІНІЙНОЇ ЛОПАТКИ НА ВІДЦЕНТРОВОМУ АПАРАТІ

Пилипака Сергій Федорович
доктор технічних наук, професор
Національний університет біоресурсів і природокористування України
ORCID: 0000-0002-1496-4615
email: psf55@ukr.net

Чепіжний Андрій Володимирович
кандидат технічних наук, доцент
Сумський національний аграрний університет
ORCID: 0000-0002-7540-8313
email: snau170287@gmail.com

Теорія складного руху матеріальної точки має чітку завершену форму і наведена в усіх підручниках із теоретичної механіки. Вона ґрунтується на тому, що рух точки вивчається одночасно по відношенню до двох систем координат. Одна із них (основна) приймається за нерухому, а друга здійснює по відношенню до нерухомої відносний рух по заданому закону. В свою чергу у рухомій системі координат здійснює відносний рух матеріальна точка. Сума цих рухів (відносного і переносного) складає абсолютний рух точки по відношенню до основної системи координат. Як переносний, так і відносний рухи задаються залежностями у функції часу.

Відомий також натуральний спосіб задання руху матеріальної точки, при якому швидкість і прискорення розглядається в проекціях на орти супровідного тригранника траєкторії (тригранника Френе). Однак в наявній літературі нам не вдалося знайти застосування тригранника Френе у якості рухомої системи координат, у якій здійснює відносний рух матеріальна точка. Розробці теорії складного руху матеріальної точки у горизонтальній площині із застосуванням тригранника Френе присвячена дана стаття.

В статті показано два способи знаходження закону відносного руху частинки вздовж прямолінійної лопатки на відцентровому апараті. Задачі розв'язуються з допомогою застосування двох координатних систем – рухомої і нерухомої. При цьому за рухому систему координат можна брати супровідний тригранник траєкторії переносного руху. В цьому випадку дуже просто знаходиться вектор абсолютного прискорення в проекціях на орти тригранника із застосуванням формул Френе. Диференціальні рівняння руху теж складаються в проекціях на орти цього тригранника на відміну від традиційних підходів. Розв'язано двома способами задачу на знаходження кінематичних параметрів відносного руху частинки вздовж прямолінійних радіально закріплених лопаток відцентрового апарата, яким є горизонтальний диск, що обертається навколо вертикальної осі.

Ключові слова: *вектор прискорення, прикладені сили, абсолютна траєкторія, диференціальні рівняння, тригранник і формули Френе, радіально закріплені лопатки, тертя, незалежна змінна, матеріальна частинка, горизонтальний диск, відцентровий апарат.*

DOI: https://doi.org/10.32845/msnau.2020.3.8

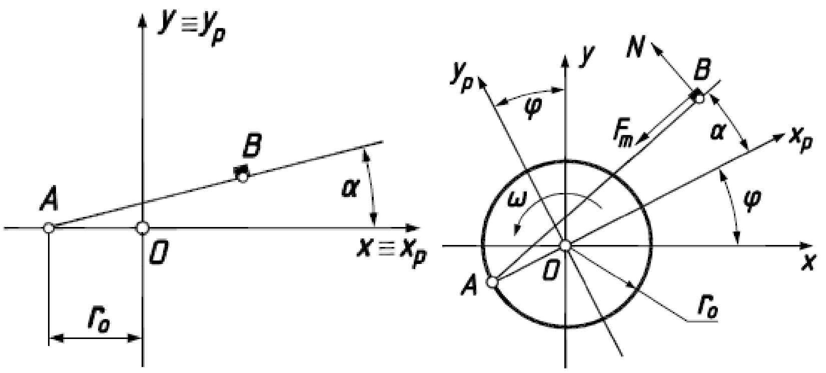
Постановка проблеми. Дослідження руху матеріальних частинок по горизонтальному диску із ортогонально прикріпленими прямолінійними лопатками при його обертанні навколо вертикальної осі є теоретичною основою при проектуванні відцентрових апаратів для розсіювання мінеральних добрив. Рух частинки в таких апаратах є складним: він складається із переносного руху частинки при обертанні диска і відносного її руху вздовж лопатки. Внаслідок цього ускладнюється задача відшукання кінематичних параметрів частинки у такому русі.

Аналіз останніх досліджень. Рух частинки вздовж прямолінійних лопаток горизонтального диска, що обертається навколо вертикальної осі, досить повно досліджено в працях [1-3]. Теорія такого руху ґрунтується на тому, що рух точки досліджується одночасно по відношенню до двох систем координат. Одна з них (основна) приймається за нерухому, а друга здійснює по відношенню до нерухомої відносний рух за заданим законом. В свою чергу у рухомій системі координат здійснюється відносний рух частинка. Сума цих рухів (відносного і переносного) складає абсолютний рух частинки по відношенню до основної системи координат. В праці [4] показано, що за рухому систему координат доцільно брати супровідний тригранник Френе траєкторії переносного руху.

Формуванні цілі статті. Порівняти способи розв'язання задачі на знаходження відносного переміщення частинки у складному її русі на прикладі відцентрового апарата без та із застосуванням тригранника і формул Френе.

Результати дослідження. Візьмемо дві плоскі системи координат, які в початковий момент збігаються: нерухому Oxy і рухому Ox_py_p. Вважатимемо, що до рухомої системи прикріплена прямолінійна вертикальна лопатка, яка перетинає вісь Ox_p в точці A і нахилена до неї під кутом α (рис. 1,а). При повороті рухомої системи на кут φ навколо спільного початку координат лопатка займе нове положення, при цьому її точка A опише дугу кола радіуса r_0 (рис. 1,б). Якщо задати постійну кутову швидкість ω обертання рухомої системи разом із лопаткою, то за час t вона повернеться на кут φ: $\varphi=\omega t$. За цей же час частинка В під дією відцентрової сили переміститься вздовж лопатки від свого початкового положення (рис. 1,а) в нове на деяку відстань u (рис. 1,б). Залежність переміщення частинки від часу $u=u(t)$ у відносному русі є невідомою функцією, яку будемо розшукувати. Положення частинки у рухомій системі координат запишемо в проекціях на її осі через кут *α*:

$$x_p = u\cos\alpha - r_0;\quad y_p = u\sin\alpha \tag{1}$$



а б

Рис. 1. Нерухома *Oxy* і рухома Ox_py_p системи координат із закріпленою прямолінійною лопаткою *AB* в рухомій системі: а) обидві системи збігаються на початку руху; б) рухома система повернута відносно нерухомої на кут $\varphi=\omega t$.

За час *t* рухома система разом із лопаткою повернеться по відношенню до нерухомої на кут $\varphi=\omega t$. За відомими формулами повороту можна записати:

$$\begin{aligned} x &= \left(u\cos\alpha - r_0\right)\cos\omega t - u\sin\alpha\sin\omega t;\\ y &= \left(u\cos\alpha - r_0\right)\sin\omega t + u\sin\alpha\cos\omega t. \end{aligned} \tag{2}$$

Зважаючи на те, що величина переміщення частинки вздовж лопатки $u = u(t)$ є функцією часу *t*, параметричні рівняння (2) описують абсолютну траєкторію руху частинки в нерухомій системі координат.

Проекції абсолютної швидкості і абсолютного прискорення частинки на осі нерухомої системи координат знайдемо послідовним диференціюванням рівнянь (2) по часу *t*. Після диференціювання (2) і групування членів отримуємо проекції абсолютної швидкості:

$$\begin{aligned} x' &= u'\cos\left(\alpha+\omega t\right) - u\omega\sin\left(\alpha+\omega t\right) + r_0\omega\sin\omega t;\\ y' &= u'\sin\left(\alpha+\omega t\right) + u\omega\cos\left(\alpha+\omega t\right) - r_0\omega\cos\omega t. \end{aligned} \tag{3}$$

Після диференціювання виразів (3) і спрощень отримуємо проекції вектора абсолютного прискорення:

$$\begin{aligned} x'' &= u''\cos\left(\alpha+\omega t\right) + \omega\left[r_0\omega\cos\omega t - u\omega\cos\left(\alpha+\omega t\right) - 2u'\sin\left(\alpha+\omega t\right)\right];\\ y'' &= u''\sin\left(\alpha+\omega t\right) + \omega\left[r_0\omega\sin\omega t - u\omega\sin\left(\alpha+\omega t\right) + 2u'\cos\left(\alpha+\omega t\right)\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Диференціальні рівняння абсолютного руху частинки в проекціях на осі нерухомої системи координат запишемо у наступному вигляді:

$$mx'' = F_X;\;\; my'' = F_Y;\;\; mz'' = F_Z. \tag{5}$$

де *m* – маса частинки; x'', y'', z'' - проекції вектора абсолютного прискорення (4); F_X, F_Y, F_Z - проекції рівнодійної прикладених до частинки сил на осі нерухомої системи координат.

Вздовж осі *Oz* переміщення відсутнє, отже $z'' = 0$, а прикладеними силами є вага частинки *mg*, де $g=9{,}81$ м/с^2, і реакція N_z горизонтального диска, тобто $F_z = N_z - mg$. Отже, із останнього рівняння (5) маємо: $N_z = mg$. В горизонтальній площині диска прикладеними до частинки в точці B силами є сила тертя F_m, спрямована в протилежну сторону ковзання частинки вздовж лопатки (рис. 1,б) і сила реакції *N* зі сторони лопатки, спрямована перпендикулярно до неї. Сила тертя F_m включає в себе дві складові: сила тертя по горизонтальному диску *fmg*, де *f* - коефіцієнт тертя частинки по диску і *fN* – сила тертя по лопатці. При цьому мається на увазі, що матеріал диска і лопатки однаковий, тобто коефіцієнт *f* для них є спільним. Таким чином, сила тертя запишеться: $F_m = f(mg + N)$. Тепер ми можемо записати проекції прикладених до частинки сил на осі рухомої системи координат через кут *α* (рис. 1,б):

$$\begin{aligned} F_{Xp} &= -f\left(mg+N\right)\cos\alpha - N\sin\alpha;\\ F_{Yp} &= -f\left(mg+N\right)\sin\alpha + N\cos\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки ми складаємо диференціальні рівняння в проекціях на осі нерухомої системи координат, то проекції сил (6) теж потрібно повернути на кут $\varphi = \omega t$ разом із рухомою системою:

$$\begin{aligned} F_X &= -\left[f\left(mg+N\right)\cos\alpha + N\sin\alpha\right]\cdot\cos\omega t + \left[f\left(mg+N\right)\cos\alpha - N\sin\alpha\right]\cdot\sin\omega t;\\ F_Y &= -\left[f\left(mg+N\right)\cos\alpha + N\sin\alpha\right]\cdot\sin\omega t - \left[f\left(mg+N\right)\cos\alpha - N\sin\alpha\right]\cdot\cos\omega t. \end{aligned} \tag{7}$$

Підставимо вирази прискорень (4) і вирази прикладених сил (7) в перші два рівняння (5) і отримаємо систему двох диференціальних рівнянь із двома невідомими залежностями $u = u(t)$ і $R = R(t)$. Розв'яжемо її відносно u'' і *N* і отримаємо:

$$\begin{aligned} u'' &= u\omega^2 - f\left(2u'\omega + g\right) + r_0\omega^2\left(f\sin\alpha - \cos\alpha\right);\\ N &= m\omega\left(2u' - r_0\omega\sin\alpha\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Проаналізувавши (8), ми бачимо, що перше рівняння є незалежним. Його можна розв'язати і отримати залежність $u = u(t)$. Нижче наводимо спрощений розв'язок при $\alpha = 0$, тобто для радіально установленої лопатки:

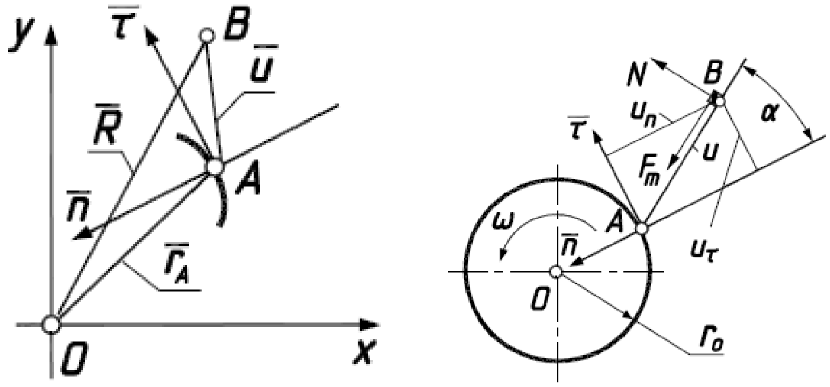
$$u=\frac{fg}{\omega^2}+r_0+c_1e^{\left(-f-\sqrt{1+f^2}\right)\omega t}+c_2e^{\left(-f+\sqrt{1+f^2}\right)\omega t},\quad (9)$$

де $c_1,\ c_2 -$ постійні інтегрування.

Диференціювання залежності (9) дасть вираз швидкості ковзання частинки вздовж прямолінійної лопатки, а його підстановка у (8) дасть залежність сили тиску *N*.

Рівняння (9) точно збігається із аналогічним рівнянням в праці [2] (рівняння (7.1.8), (7.1.9), стор. 366), хоча одержані вони при зовсім різних підходах. В праці [2] визначався напрям прискорення Коріоліса за правилом Жуковського, яке в нас теж присутнє в проекціях на осі координат.

Тепер розглянемо розв'язання цієї само задачі із використанням тригранника Френе. При обертанні рухомої системи початкова точка А, з якої починається рух по лопатці, в попередньому прикладі описувала коло радіуса r_0 (рис. 1,б). Приймемо це коло за напрямну криву для супровідного тригранника Френе. Його орт $\bar{\tau}$ завжди спрямований по дотичній до кривої (в нашому випадку до кола), а орт $\bar{n}-$ по головній нормалі в сторону центра кривини, орт $\bar{b}-$ бінормаль – проекціюється в точку, яка збігається із точкою *A* в його вершині (рис. 2,б).Тригранник Френе замінить рухому систему у попередній задачі. Закріпимо в його системі жорстко прямолінійну лопатку під кутом *α*, вздовж якої буде рухатися частинка, яка знаходиться в точці *B* (рис. 2,б). При русі тригранника вздовж дуги кола із постійною швидкістю $V_A = \omega r_0$ частинка буде знаходитися в таких же умовах, як і в попередній задачі.



а б

Рис. 2. Нерухома *Oxy* і рухома $A\,\bar{\tau}\,\bar{n}$ системи координат із закріпленою прямолінійною лопаткою *AB* в рухомій системі: а) до описання положення точки *B* у двох системах; б) положення частинки у рухомій системі (триграннику Френе) та прикладені до неї сили.

Положення точки *A* в нерухомій системі можна записати у векторному вигляді (рис. 2,а,б):

$$\bar{R}=\bar{r}_A+\bar{u}=\bar{r}_A+\bar{\tau}u_\tau.+\bar{n}u_n=\bar{r}_A+\bar{\tau}u\cos\alpha+\bar{n}u\sin\alpha \quad (10)$$

При застосуванні тригранника і формул Френе необхідно перейти від незалежної змінної часу *t* до натурального параметра напрямної кривої – її довжини дуги *s* [4]. Знайдемо абсолютну швидкість точки *B* диференціюванням виразу (10) з переходом від змінної *t* до дуги *s*, маючи на увазі, що *u* – змінна величина:

$$\frac{d\bar{R}}{dt}=\frac{d\bar{R}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{d\bar{R}}{ds}V_A=$$
$$=V_A\left[\frac{d\bar{r}_A}{ds}+\left(\frac{d\bar{\tau}}{ds}u+\bar{\tau}\frac{du}{ds}\right)+\left(\frac{d\bar{n}}{ds}u+\bar{n}\frac{du}{ds}\right)\sin\alpha\right] \quad (11)$$

У виразі (11) похідні $\frac{d\bar{r}_A}{ds}$; $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$; $\frac{d\bar{n}}{ds}$ мають кінематичну інтерпретацію [4]. Ці похідні розписуються в проекціях на орти тригранника через кривину k і скрут *σ* напрямної кривої. Це основні формули диференціальної геометрії, у яких незалежною змінною служить дугова координата *s* (наводимо спрощений варіант для плоскої кривої, у якої відсутній скрут *σ*):

$$\bar{r}_A'=\bar{\tau};\ \bar{\tau}'=k\bar{n};\ \bar{n}'=-k\bar{\tau}. \quad (12)$$

де *k* - кривина кривої, яка задається натуральним рівнянням *k = k(s)*.

В роботі (4) теоретично доведено, що підстановкою (12) в (11) з наступним групуванням отриманих виразів по напрямках ортів ми отримаємо вираз абсолютної швидкості V_B точки *B* в проекціях на орти тригранника. Підставляємо, групуємо і отримуємо:

$$V_B=\bar{R}'=V_A\times$$
$$\times\left[\bar{\tau}\left(1+u'\cos\alpha-uk\sin\alpha\right)+\bar{n}\left(u'\sin\alpha+uk\cos\alpha\right)\right] \quad (13)$$

Щоб отримати вектор абсолютного прискорення точки *B*, необхідно вираз (13) ще раз продиференціювати по змінній *s* із застосуванням формул Френе, маючи на увазі, що *u = u(s)* і *k = const*, отриманий результат згрупувати за напрямками ортів і помножити на швидкість V_A руху тригранника [4]. Нижче наводимо готовий результат:

$$\overline{R''} = V_A^2\left[\bar{\tau}\left(u''\cos\alpha - 2u'k\sin\alpha - uk^2\cos\alpha\right) + \bar{n}\left(u''\sin\alpha + 2u'k\cos\alpha - uk^2\sin\alpha + k\right)\right] \qquad (14)$$

Оскільки вектор абсолютного прискорення (14) заданий виразами в проекціях на орти супровідного тригранника Френе, то і систему диференціальних рівнянь ми будемо складати в проекціях на орти цього ж тригранника на відміну від першого випадку, коли ми використовували нерухому систему координат.

Запишемо проекції прикладених до частинки сил на орти тригранника Френе через кут α (рис. 2,б):

$$\begin{aligned} F_\tau &= -f\left(mg + N\right)\cos\alpha - N\sin\alpha; \\ F_n &= -f\left(mg + N\right)\sin\alpha + N\cos\alpha\ . \end{aligned} \qquad (15)$$

Аналогічно, як у першому випадку, складаємо систему диференціальних рівнянь за формулами (5), але вже на рухому систему тригранника Френе:

$$\begin{aligned} mV_A^2\left(u''\cos\alpha - 2u'k\sin\alpha - uk^2\cos\alpha\right) &= -f\left(mg + N\right)\cos\alpha - N\sin\alpha; \\ mV_A^2\left(u''\sin\alpha + 2u'k\cos\alpha - uk^2\sin\alpha + k\right) &= -f\left(mg + N\right)\sin\alpha + N\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (16)$$

Швидкість руху тригранника $V_A = \omega r_0 = \omega/k$. Підставимо цей вираз у (16) і розв'яжемо систему (16) відносно u'' і N і отримаємо:

$$\begin{aligned} u'' &= uk^2 - f\left(2ku' + \frac{gk^2}{\omega^2}\right) - k\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right); \\ N &= \frac{m\omega^2}{k}\left(2u' + \cos\alpha\right). \end{aligned} \qquad (17)$$

В системі (17) перше рівняння є незалежним, отже його можна розв'язувати окремо. Розглянемо спрощений варіант при $\alpha = 900$, тобто для радіально установленої лопатки:

$$u'' = uk^2 - f\left(2ku' + \frac{gk^2}{\omega^2}\right) - k\sin\alpha. \qquad (18)$$

Диференціальне рівняння (18) має наступний розв'язок:

$$u = \frac{fg}{\omega^2} + \frac{1}{k} + c_1 e^{\left(-f-\sqrt{1+f^2}\right)ks} + c_2 e^{\left(-f+\sqrt{1+f^2}\right)ks} \qquad (19)$$

Перейдемо у (19) від незалежної змінної s до часу t. Враховуючи постійну кутову швидкість ω обертання диска можна записати $s = r_0\omega t = \omega t/k$. Звідси $ks = \omega t$. Підставивши цей вираз у (19), а також вираз $1/k = r_0$, ми отримаємо точно таке ж рівняння, як і (9). Отже абсолютно різні підходи в розв'язанні поставленої задачі дають однаковий результат.

Висновки. При розв'язуванні задачі на динаміку частинки у складному русі за рухому систему координат можна брати супровідний тригранник траєкторії переносного руху. В цьому випадку дуже просто знаходиться вектор абсолютного прискорення в проекціях на орти тригранника із застосуванням формул Френе. Диференціальні рівняння руху теж складаються в проекціях на орти цього тригранника на відміну від традиційних підходів. Особливістю є те, що за незалежну змінну потрібно брати довжину дуги s траєкторії переносного руху тригранника. В статті двома способами розв'язано задачу на знаходження кінематичних параметрів відносного руху частинки вздовж прямолінійних радіально закріплених лопаток відцентрового апарата, яким є горизонтальний диск, що обертається навколо вертикальної осі. Диференціальні рівняння і їх розв'язки є різними, оскільки в одному випадку за незалежну змінну взято час t (традиційний підхід), у другому – довжину дуги s (запропонований підхід), однак теоретично показано, що при переході від змінної довжини дуги s до змінної часу t результати повністю збігаються.

Список літератури:

1. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. -К.: УАСХН, 1960. - 283 с.

2. Заика П.М. Избранные задачи земледельческой механики. -К.: Изд-во УСХА, 1992. -507 с.

3. Адамчук В.В. Теоретичне дослідження розгону мінеральних добрив розсіювальним органом. Механізація і енергетика сільського господарства. IV міжнародна науково-технічна конференція «Motrol 2003». –Том 6. –К.: НАУ, 2003. –С. 19-31.

4. Пилипака С.Ф. Дослідження руху матеріальної частинки по горизонтальному диску, який обертається навколо вертикальної осі, за допомогою рухомого натурального тригранника і формул Френе. Механізація та електрифікація сільського господарства. Міжвідомчий тематичний науковий збірник. – Глеваха, 2005. – Вип. 89. – С. 49-60.

Chepyzhniy A. V., *Sumy National Agrarian University (Ukraine)*

Pylypaka S. F., *National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine (Ukraine)*

Relative motion of the corpuscle along the rectilinear vane on the centrifugal means

The theory of complex motion of a point is a clear and complete form given in all textbooks on theoretical mechanics. It is based on the fact that the movement point studied simultaneously with respect to two coordinate systems. One of them (main) taken as fixed, and the other carries against the immovable relative movement of a given law. In turn, in the moving frame carries the relative motion of a point. The sum of these movements (relative and portable) is the absolute motion of a point in relation to the basic coordinate system. As portable and relative movements dependencies defined as a function of time.

There is also a natural way to setting motion of a point at which the speed and acceleration seen in projections to cover orty three-edge trajectory (Frenet formulas). However, the available literature, we could not be used Frenet formulas as moving coordinate system, which provides the relative motion of a point. The development of the theory of complex motion of a point in the horizontal plane using Frenet formulas devoted to this article.

The article shows two ways of law relative motion of particles along a rectilinear blade for a centrifugal machine. Problems are solved with the help of the two coordinate systems - movable and immovable. At the same time moving coordinate system can take cover three-edge trajectory portable motion. In this case it is very simple absolute acceleration vector projections on orty three-edge using formulas Freinet. Differential equations of motion also consist of projections on orty three-edge unlike traditional approaches. In article two ways to solve the problem of kinematics parameters relative motion of the particles along straight radial fixed blades centrifugal device, which is a horizontal disc rotating around a vertical axis.
Key words: *acceleration vector, applied forces, absolute trajectory, differential equations, trihedron and Frenet formulas, radially fixed blades, friction, independent variable, material particle, horizontal disk, centrifugal apparatus.*

Дата надходження до редакції: 17.11.2020 р.